с каждым оператором, входящим в максимальный набор коммутирующих операторов, ассоциировать физические наблюдаемые, то тем самым фактически будет выявлено максимальное число линейных законов сохранения, поскольку всякий оператор подалгебры Картана диагонален в бигармонической системе координат.

§ 4. Метод операторов рождения и уничтожения

В элементарной квантовой механике одной частицы с сопряженными динамическими переменными p и q, $[p, q] = -\mathrm{i}$, хорошо известно, что операторы, определяемые в виде

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - \mathrm{i}p) \tag{1}$$

и называемые соответственно *операторами уничтожения и рождения*, удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[a, a^*] = 1. \tag{2}$$

Своими названиями они обязаны тому факту, что гамильтониан $H = p^2/2 + q^2/2$ линейного гармонического осциллятора принимает вид (в единицах $\hbar\omega = 1$, $m = 1$)

$$H = a^*a + \frac{1}{2}, \tag{3}$$

так что если $|0\rangle$ $(= \pi^{1/4} \exp[-{}^1/_2 x^2])$ — основное собственное состояние оператора H с энергией ${}^1/_2$, то $a^*|0\rangle$ является другим собственным состоянием H с энергией $(1 + {}^1/_2)$, $a^*a^*|0\rangle$ — собственным состоянием с энергией $(2 + {}^1/_2)$ и т. д. Кроме того, $a(a^{*n})|0\rangle$ пропорционально $a^{*\,n-1}|0\rangle$ и $a|0\rangle = 0$. Таким образом, a^* рождает одну единицу «возбуждения» (т. е. повышает энергию), а a уничтожает одну единицу «возбуждения» (понижает энергию).

Понятно, что алгебра Ли (2) эквивалентна алгебре Гейзенберга $[p, q] = -\mathrm{i}$.

Соотношения (1), (2) и (3) легко обобщаются на совокупность независимых операторов рождения и уничтожения:

$$[a_i, a_j] = [a_i^*, a_j^*] = 0, \quad [a_i, a_j^*] = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

и

$$H = \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i + N/2, \tag{5}$$

так что собственные состояния оператора H содержат n_1 возбуждений типа 1, n_2 возбуждений типа 2 и т. д., то есть

$$a_1^{*n_1} a_2^{*n_2} \ldots a_N^{*n_N} |0\rangle. \tag{6}$$

Операторы a_i, a_i^* называются также *бозонными операторами*. Чтобы пояснить эту терминологию, реинтерпретируем состояния (6) следующим образом. Рассмотрим квантовую механику N тождественных частиц. Пусть i — индекс, обозначающий совокупность квантовых чисел, характеризующих состояния одной частицы (эти квантовые числа могут быть дискретными или непрерывными с соответствующими областями изменения); другими словами, полным набором одночастичных состояний являются φ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Согласно общему постулату квантовой теории неразличимых частиц, различными состояниями системы N тождественных частиц являются только те, которые характеризуются числом частиц n_i в состоянии φ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Таким образом, состояние (6) можно интерпретировать как n_1 частиц в состоянии φ_1, n_2 частиц в состоянии φ_2 и т. д. Следовательно, a_k^* рождает частицу в состоянии k, a_k ее уничтожает.

Пусть H — пространство состояний системы бозонов с базисными векторами $|n_1, n_2, n_3, \ldots\rangle$, нумеруемыми числами заполнения, а V — пространство одночастичных состояний.

В H операторы a_i и a_i^* действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i\,|n_1, n_2, \ldots, n_n\rangle &= \sqrt{n_i}\,|n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_n\rangle, \\ a_i^*\,|n_1, n_2, \ldots, n_n\rangle &= \sqrt{n_i + 1}\,|n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \ldots\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

Непосредственные вычисления показывают, что из этих равенств действительно получаются коммутационные соотношения (4). В 20.2 мы покажем, что с точностью до эквивалентности существует только одно неприводимое (интегрируемое до группы) представление канонических коммутационных соотношений (4).

Следующий пример демонстрирует другую интересную реализацию канонических коммутационных соотношений (4).

Пример 1. Пусть H — гильбертово пространство функций комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int u(z)\bar{v}(z)\exp(-\bar{z}z)\,d\bar{z}\,dz, \tag{8}$$

где

$$d\bar{z}\,dz = \pi^{-n}\prod_{k=1}^{n} dx_k\,dy_k, \qquad z_k = x_k + iy_k. \tag{9}$$

Тогда отображение

$$a_i \to \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad a_i^* \to z_i, \tag{10}$$

определенное на аналитических функциях $u(z)$ в H, задает представление алгебры Ли (4).

Построение алгебр Ли из билинейных комбинаций операторов рождения и уничтожения

Физические величины наподобие энергии (3), момента количества движения $M_{ij} = q_i p_j - p_j q_i$ и т. п. являются билинейными формами вида

$$c_{ij} a_i^* a_j.$$

Это наталкивает на мысль строить все базисные элементы X_i алгебры Ли L в виде таких билинейных комбинаций. Действительно, пусть a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — совокупность бозонных операторов в гильбертовом пространстве H. Положим $A_{ij} = a_i^* a_j$. Тогда с помощью соотношений (4) получаем

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk} A_{il} - \delta_{il} A_{jk}. \tag{11}$$

Следовательно, в силу (9.4.2) набор $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ образует совокупность генераторов алгебры Ли $\mathrm{gl}(n, C)$. Поскольку любая алгебра Ли является подалгеброй в $\mathrm{gl}(n, C)$, по теореме Адо любая другая комплексная или вещественная алгебра Ли генерируется поднабором набора $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$. В частности, воспользовавшись (1.6), находим, что операторы

$$\begin{aligned} &M_{kk} = a_k^* a_k, \quad k = 1, \ldots, n, \\ &\left.\begin{aligned} M_{kl} &= a_k^* a_l + a_l^* a_k, \\ \tilde{M}_{kl} &= \mathrm{i}\,(a_k^* a_l - a_l^* a_k), \end{aligned}\right\} k < l \leqslant n, \end{aligned} \tag{12}$$

генерируют алгебру Ли $u(n)$.

Аналогично, воспользовавшись (1.42), находим, что операторы

$$X_{ik} = a_i^* a_k - a_k^* a_i \tag{13}$$

генерируют алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$. Явное построение генераторов алгебры $\mathrm{sp}(n)$ дано в упражнении 6.4.5.

С помощью операторов рождения и уничтожения можно также построить некомпактные алгебры Ли, такие, как $u(p, q)$, $\mathrm{so}(p, q)$, $\mathrm{sp}(p, q)$ и т. п. В качестве иллюстрации дадим построение генераторов для алгебр Ли $u(p, q)$, которые часто используются в физике частиц. Пусть a_i, a_j^*, $i, j = 1, 2, \ldots, p$, и $b_{\hat{i}}$, $b_{\hat{j}}^*$, $\hat{i}, \hat{j} = p + 1, \ldots, p + q$, — наборы операторов рождения и уничтожения, удовлетворяющих соотношениям

$$[a_i, a_j^*] = \delta_{ij}, \quad \left[b_{\hat{i}}, b_{\hat{j}}^*\right] = \delta_{\hat{i}\hat{j}}, \tag{14}$$

а все остальные коммутаторы равны нулю. Определим совокупность A операторов при помощи таблицы, состоящей из билинейных произведений

$$A=\begin{bmatrix} A_{ij} & A_{i\hat{j}} \\ A^*_{j\hat{i}} & A_{\hat{i}\hat{j}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a^*_i a_j+r\delta_{ij} & a^*_i b^*_{\hat{j}} \\ -b_{\hat{i}} a_j & b_{\hat{i}} b^*_{\hat{j}}+r\delta_{\hat{i}\hat{j}} \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

где r — произвольное вещественное число. Легко проверить, что элементы из совокупности A удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathrm{gl}\,(p+q,\ R)$, тогда как операторы

$$M_{kk}=A_{kk}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$M_{kl}=A_{kl}+A_{lk}, \quad \tilde{M}_{kl}=\mathrm{i}\,(A_{kl}-A_{lk}), \quad k\leqslant l\leqslant p \text{ или } p<k<l, \qquad (16)$$

$$N_{k\hat{l}}=A_{k\hat{l}}-A_{\hat{l}k}, \quad \tilde{N}_{k\hat{l}}=\mathrm{i}\left(A_{k\hat{l}}+A_{\hat{l}k}\right), \quad k\leqslant p<l,$$

генерируют алгебру Ли $u\,(p,\ q)$.

Пользуясь (7), можно построить затем представления всех этих алгебр Ли.

§ 5. Комментарии и дополнения

а. Алгебраический метод построения неприводимых представлений, рассмотренный в § 1, был разработан Гельфандом и Цетлиным в [322, 323]. Они выписали только конечные формулы, такие, как (1.14)—(1.19). Бэрдом и Биденхарном в [32] был дан интересный вывод этих формул, основанный на теории Вейля тензорных представлений, а также исправлены некоторые формулы в оригинальной работе Гельфанда и Цетлина. В 1965 г. Гельфанд и Граев обобщили и усовершенствовали этот формализм, им удалось вычислить матричные элементы глобальных конечномерных представлений $\mathrm{GL}\,(n,\ C)$; алгебраический подход они распространили также на теорию представлений некомпактных алгебр Ли. Мы излагаем эту теорию в гл. 11. Подробный анализ представлений алгебр $u\,(n)$, $\mathrm{so}\,(n)$, $u\,(n,\ 1)$ и $\mathrm{so}\,(n,\ 1)$ на языке схем Гельфанда—Цетлина был сделан Оттосоном [653, 654]. Пользуясь техникой Гельфанда—Цетлина, Холмэн и Биденхарн в [419] дали альтернативный вывод различных результатов для представлений $u\,(n)$.

Между базисными векторами Гельфанда—Цетлина и компонентами тензора существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, рассмотрим ассоциированные со старшим весом $m=(m_{1n},\ m_{2n},\ \ldots,\ m_{nn})$ схемы Гельфанда—Цетлина (1.11) и образуем схему Юнга, которая содержит: