распространил этот подход на другие специальные функции. Результаты Виленкина собраны в его монографии [819]. Недавно появились и другие монографии, посвященные исследованию специальных функций математической физики с точки зрения представлений групп, а именно, Миллера [594] и Талмана [801]; последняя основана на лекциях Вигнера 1955 г.

г. Операторы рождения и уничтожения своим началом восходят к квантовой теории осцилляторов и излучения (Дирак). Фоковское пространство было введено в 1932 г. (Фок). Представления бесконечномерных операторов Ферми и Бозе были даны впервые Гордингом и Вайтманом в 1954 г., после чего в этом направлении была проделана значительная работа.

Гильбертово пространство целых аналитических функций восходит, по-видимому, к Лондону, но в законченном виде было введено Баргманном [39] и в 1965 году распространено Сигалом на бесконечную систему операторов рождения и уничтожения.

Построение представлений компактной алгебры Ли su (2) при помощи операторов рождения и уничтожения было осуществлено Швингером. Некомпактный случай обсуждался Барутом и Фронсдэлом [75] для su (1,1) и Андерсоном, Фишером и Рончкой [12] для $u(p, q)$.

§ 6. Упражнения

§ 1.1. Постройте неприводимые представления алгебры Ли sp (n), пользуясь методом Гельфанда—Цетлина.

Указание. Разработайте структуру схем Гельфанда—Цетлина, используя разложение неприводимых представлений sp (n) относительно цепочки последовательных максимальных подалгебр алгебры sp (n).

§ 2.1. Покажите, что определяющее представление L группы Лоренца в R^4

$$x \to x' = Lx$$

эквивалентно представлению $D^{(1/2,\,1/2)}$, т. е.

$$D^{(1/2,\,1/2)} = TLT^{-1}.$$

§ 2.2. Покажите, что генераторы группы Лоренца для представлений $D^{(1/2,\,0)}$ и $D^{(0,\,1/2)}$ могут быть выбраны в виде ($k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} J_k^{(1/2,\,0)} &= -\frac{1}{2}\,i\sigma_k, \quad N_k^{(1/2,\,0)} = \frac{1}{2}\,\sigma_k, \\ J_k^{(0,\,1/2)} &= -\frac{1}{2}\,i\sigma_k, \quad N_k^{(0,\,1/2)} = -\frac{1}{2}\,\sigma_k. \end{aligned} \tag{1}$$

§ 2.3. Покажите, что представление $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$ группы SL (2, C) можно записать в виде

$$(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})(A) = \begin{cases} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{w}\cdot\Sigma\right) \equiv \cos\frac{w}{2} + i\hat{\boldsymbol{w}}\cdot\Sigma\sin\frac{w}{2} \\ \qquad\qquad \text{для специальных вращений,} \\ \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) \equiv \operatorname{ch}\frac{u}{2} - \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\operatorname{sh}\frac{u}{2} \\ \text{для специальных преобразований Лоренца,} \end{cases} \tag{2}$$

где $\hat{\boldsymbol{w}}$ и $\hat{\boldsymbol{u}}$ — единичные векторы в направлении $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u}$, $w = |\boldsymbol{w}|$, $u = |\boldsymbol{u}|$ и

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

§. 2.4. Покажите, что неприводимое представление $D^{(l,\,j)}$ группы SL (2, C) может быть реализовано в пространстве симметрических бесследных тензоров $T_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{2j}}$.

§. 2.5. Покажите, что представления $D^{(j,\,0)}$ и $D^{(0,\,j)}$ группы SL (2, C) удовлетворяют следующим равенствам:

$$D^{(j,\,0)}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right) = m^{-2j}(\boldsymbol{\sigma p}) \otimes (\boldsymbol{\sigma p}) \otimes \cdots \otimes (\boldsymbol{\sigma p}) \quad (2j \text{ раз}),$$

$$D^{(0,\,j)}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right) = m^{-2j}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{p}) \otimes (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{p}) \otimes \cdots \otimes (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{p}) \quad (2j \text{ раз}),$$

где $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma}$.

§ 4.1. Пусть

$$a_k = 2^{-1/2}(x_k + i\partial_k), \quad a_k^* = 2^{-1/2}(x_k - i\partial_k), \quad k = 1,\ 2,\ 3,$$

и

$$X_{kl} = a_k^* a_l + \frac{1}{2}\delta_{ij}. \tag{4}$$

Покажите, что на операторы (4) натягивается алгебра Ли u (3).

Покажите, что в пространстве $H = L^2(R^3)$ реализуются лишь наиболее вырожденные представления u (3), характеризуемые старшими весами $m = (m,\ 0,\ 0)$. Покажите, что наименьшими размерностями этих представлений являются 1, 6, 10 и 15.

Указание. Покажите, что операторы Казимира C_2, C_3, C_4, ... являются функциями оператора $C_1 = \sum_1^3 X_{ii}$.

§ 4.2. Пусть $H = L^2(R^n)$, и пусть a_l и a_l^*, $l = 1, 2, \ldots, n$ — операторы уничтожения и рождения, заданные согласно

$$a_l = 2^{-1/2}(q_l + ip_l), \quad a_l^* = 2^{-1/2}(q_l - ip_l). \tag{5}$$

Покажите, что вектор

$$|0\rangle = \pi^{-n/4} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \tag{6}$$

удовлетворяет условию

$$a_l|0\rangle = 0$$

и

$$(a_l^*)^p|0\rangle = H_p(x_l)|0\rangle, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где $H_p(x_i)$ — нормированные полиномы Эрмита.

§ 4.3. Положите

$$e_a(z) = \exp(\bar{a}z). \tag{8}$$

Покажите, что функции (8) удовлетворяют условиям (по отношению к скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$, заданному при помощи (4.8))

$$(e_a, e_b) = e_b(a), \quad (e_a, u) = u(a), \tag{9}$$

так что они играют роль δ-функций Дирака.

§ 4.4. Пусть M, N и R — $n \times n$-матрицы. Покажите, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} [a^*Ma, a^*Ma] &= a^*[M, N]a, \\ [aNa, a^*Ra^*] &= a^*(R^TN^T + R^TN + RN^T + RN)a, \\ [a^*Na, aRa] &= -a(R^TN + RN)a, \\ [a^*Ma, a^*Ra^*] &= -a^*(RM^T + RM)a^*, \end{aligned} \tag{10}$$

где $a^*Ma = a_i^*M_{ik}a_k$ и т. п.

§ 4.5. Пусть a_i, a_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$ — набор бозонных операторов. Покажите, что билинейные комбинации

$$F_{ij} = a_ia_j, \quad G_{ij} = a_i^*a_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad H_{ij} = a_i^*a_j^* \tag{11}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[G_{ij}, G_{kl}] = \delta_{jk}G_{il} - \delta_{il}G_{jk}, \tag{12}$$

$$[F_{ij}, G_{kl}] = \delta_{ik}F_{il} + \delta_{ik}F_{jl} \tag{13}$$

и образуют алгебру Ли sp (n, C).

§ 4.6. Найдите набор M^{nm} матриц, таких, что билинейные комбинации $a^*M^{nm}a$ образуют

1) алгебру Ли $u(n)$,
2) алгебру Ли so (n).

§ 4.7. Пусть операторы b_k удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[b_l, b_k]_+ = 0 = [b_l^*, b_k^*]_+, \quad [b_l, b_k^*]_+ = \delta_{lk} I, \quad l, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Покажите, что представления алгебры (14) эквивалентны представлениям конечной группы порядка 2^n.

§ 4.8. Обозначим через $\boldsymbol{Z}^+$ множество положительных целых чисел, а через A_k, $k \in \boldsymbol{Z}^+$ — копию алгебры всех матриц ранга два с комплексными элементами. Пусть $A = \bigotimes_{k \in Z} A_k$, и обозначим через σ_k^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, каноническое вложение в A единицы σ^0 и матриц Паули σ^l, $l = 1, 2, 3$, из A_k. Покажите, что

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2} \sigma_1^3 \sigma_2^3 \cdots \sigma_{k-1}^3 (\sigma_k^1 + i\sigma_k^2), \\ b_k^* &= \frac{1}{2} \sigma_1^3 \sigma_2^3 \cdots \sigma_{k-1}^3 (\sigma_k^1 - i\sigma_k^2) \end{aligned} \tag{15}$$

удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям (14) с $n = \infty$.