Глава 11

Теория представлений алгебр Ли и обертывающих алгебр неограниченными операторами: аналитические векторы и интегрируемость

В данной главе мы излагаем общую теорию представлений алгебр Ли и обертывающих алгебр линейными неограниченными операторами в гильбертовом пространстве. Это одна из наиболее интересных и в то же время трудных областей современной математики. Она требует знания алгебры, топологии, функционального анализа и дифференциальных многообразий. Теория дает также строгую формулировку различных задач квантовой теории и физики частиц.

Даже в нерелятивистской квантовой механике такие наблюдаемые, как координаты, импульсы и угловые моменты, представляются дифференциальными операторами в частных производных, которые неограничены в пространстве физических состояний.

В § 1 рассматривается теория Гординга представлений алгебр Ли неограниченными операторами. В § 2 мы распространяем эту теорию на обертывающую алгебру E алгебры Ли. В частности, мы выводим фундаментальную теорему, которая определяет, когда элемент Y из E существенно самосопряжен.

Основное понятие аналитических векторов и аналитической доминантности операторов вводится в § 3. Здесь мы выводим ряд важных теорем об аналитических векторах для самосопряженных операторов и аналитической доминантности в алгебрах Ли и обертывающих алгебрах.

В § 4 мы вводим понятие аналитических векторов для представления T группы G и показываем, что аналитические векторы для представлений алгебр Ли и для представлений групп совпадают. Мы также показываем, что аналитические векторы для оператора Нельсона $\Delta = x_1^2 + \cdots + x_d^2$, $d = \dim L$, также являются аналитическими векторами для представлений групп.

В § 5 содержится критерий Нельсона об интегрируемости кососимметрического представления алгебры Ли L до глобального унитарного представления соответствующей односвязной группы Ли G.

В § 6 представлена красивая теория интегрируемости представлений алгебр Ли, разработанная Флато, Саймоном, Снелманом и Стернгеймером. Эта теория базируется на понятии слабой аналитичности и позволяет выразить условия интегрируемости

в терминах свойств генераторов Ли алгебры Ли. В противоположность теории Нельсона в большинстве практических случаев она сводит задачу интегрируемости к задаче проверки простых свойств дифференциальных операторов первого порядка. Выведенный критерий интегрируемости может быть легко проверен в приложениях и важен для квантовой физики.

В § 7 излагается изящный метод явного построения плотного множества аналитических векторов для представления T группы G, используя решения уравнения теплопроводности на G. Это множество является общей инвариантной областью определения для алгебры Ли группы G и ее обертывающей алгебры.

Наконец, в § 8 описана техника Гельфанда—Цетлина для построения неприводимых представлений алгебры $u(p, q)$, использующая диаграммный метод.

Приложения в квантовой теории рассматриваются в гл. 12, 13, 17, 20 и 21.

§ 1. Представления алгебр Ли неограниченными операторами

А. *Общие свойства представлений алгебр Ли*

В конечномерном случае представление $X \to T(X)$ алгебры Ли L определялось как гомоморфизм из L в $\mathrm{gl}(n, C)$, т. е. для X, Y из L и α, β из C^1 мы имеем

$$\alpha X + \beta Y \to \alpha T(X) + \beta T(Y), \tag{1}$$

$$[X, Y] \to [T(X), T(Y)] = T(X)T(Y) - T(Y)T(X), \tag{2}$$

где $T(\cdot)$ — элемент из $\mathrm{gl}(n, C)$ (см. гл. 1, § 1.В). Равенство $[T(X), T(Y)] = T(X)T(Y) - T(Y)T(X)$ следует из того факта, что каждая алгебра Ли L является подалгеброй в $\mathrm{gl}(n, C)$, в которой коммутационные соотношения совпадают с $[X, Y] = XY - YX$.

Одной из основных трудностей в общей теории представлений алгебр Ли является тот факт, что во многих важных случаях представители $T(X)$ элементов алгебры Ли заданы неограниченными операторами (см. пример 1). Поэтому мы должны рассматривать задачу выбора собственной общей области определения D для множества неограниченных операторов. Это фундаментальная проблема функционального анализа. Обзор основных результатов функционального анализа дан в приложении Б. Читателей, не знакомых с этими результатами, мы отсылаем к этому приложению.

Поскольку мы хотим рассматривать наряду с представителем $T(X)$ сопряженный оператор $T(X)^*$, общая область определения D должна быть плотной в пространстве представления H. Однако

область определения не может совпадать со всем пространством, так как на таких областях определения определены только ограниченные операторы (см. приложение Б, лемма 1.2). Более того, поскольку мы хотим определить коммутатор $T(X)\,T(Y)-T(Y)\,T(X)$ для представителей $T(X)$ и $T(Y)$, область значений $R(T(X))$ должна лежать в D для любых X из L. Поэтому область D должна быть инвариантной. Следовательно, мы приходим к следующему общему определению представления абстрактной алгебры Ли L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Представление T алгебры Ли L в гильбертовом пространстве H* — это любой гомоморфизм $X \to T(X)$, $X \in L$, из L в множество линейных операторов, имеющих общую линейную плотную инвариантную область определения D.

Определение 1 означает, что для произвольных X, Y из L, α, β из C^1 и u из D имеем

$$T(\alpha X+\beta Y)\,u=\alpha T(X)\,u+\beta T(Y)\,u, \tag{3}$$

$$T([X,\ Y])\,u=[T(X),\ T(Y)]\,u=(T(X)\,T(Y)-T(Y)\,T(X))\,u. \tag{4}$$

Заметим, что, согласно (4),

$$[T(X),\ [T(Y),\ T(Z)]]\,u+[T(Y),\ [T(Z),\ T(X)]]\,u+$$
$$+[T(Z),\ [T(X),\ T(Y)]]\,u=0,$$

т. е. тождество Якоби выполняется автоматически.

Поскольку область D инвариантна, любое представление T алгебры Ли L может быть расширено до представления обертывающей алгебры.

Множество $N=T^{-1}(0)\subset L$ является идеалом в L. В самом деле, если $X\in N$ и $Y\in N$, то $T([X,Y])=[T(X),T(Y)]=0$, т. е. $[X,Y]\in N$. Поэтому, в частности, нетривиальные представления простых алгебр Ли точны, т. е. отображение $X\to T(X)$ взаимно однозначно.

Представление T алгебры L называют *кососопряженным* (*кососимметрическим*), если гомоморфизм $X\to T(X)$ отображает L в множество кососопряженных (кососимметрических) операторов. Ясно, что в кососопряженном представлении T операторы $iT(X)$ самосопряжены (эрмитовы) и удовлетворяют коммутационным соотношениям с чисто мнимыми структурными константами.

Представление T *топологически неприводимо*, если не существует собственного замкнутого подпространства $H'\subset H$, содержащего общую линейную инвариантную относительно L область определения $D'\subset H'$, которая плотна в H'.

ПРИМЕР 1. Пусть L — алгебра Ли группы Пуанкаре, и пусть $H=L^2(\Omega)$, где Ω — четырехмерное пространство Минковского. Коммутационные соотношения для L даны в (1.1.23а—в). Можно

проверить, что следующие формальные дифференциальные операторы

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \quad P_\mu = \partial_\mu, \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{5}$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ удовлетворяют этим коммутационным соотношениям. Чтобы получить представление T алгебры L, следует определить общую плотную линейную инвариантную область определения D для операторов (5). Мы можем взять одно из следующих двух плотных подпространств в $L^2(\Omega)$:

$$1^\circ \qquad D = C_0^\infty(\Omega), \tag{6}$$

$$2^\circ \qquad D = S(\Omega); \tag{7}$$

здесь $S(\Omega)$ — пространство Шварца $C^\infty(\Omega)$-функций $\varphi(x)$ с

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \tag{8}$$

где

$$x^\alpha \equiv x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \tag{9}$$

$$D^\beta \equiv \partial^{|\beta|}/\partial x_0^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \partial x_3^{\beta_3}, \quad |\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \tag{10}$$
$$\alpha_\mu, \beta_\mu = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Легко проверить, что все генераторы (5) кососимметричны на этих областях и что эти области инвариантны для операторов (5).

Б. *Теория Гординга*

Рассмотрим теперь стандартный метод построения общей линейной инвариантной плотной области определения для представления $X \to T(X)$ алгебры L, задав представление $x \to T_x$ соответствующей группы Ли G. Пусть $x(t) = \exp(tX)$, $X \in L$, — однопараметрическая подгруппа в G, а $T_{x(t)}$ — соответствующая однопараметрическая подгруппа операторов. Если для $u \in H$ существует $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}(T_{x(t)} - I)u$, то действие генератора $T(X)$ подгруппы $T_{x(t)}$ определяется формулой

$$T(X)u = \lim_{t\to 0} t^{-1}(T_{x(t)} - I)u \qquad x(t) = \exp(tX). \tag{11}$$

Множество всех $u \in H$, для которых правая часть соотношения (11) определена, называют *областью определения* для $T(X)$.

Пусть $C_0^\infty(G)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в групповом пространстве G, и пусть $T(\varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, — новый «сглаженный» оператор,

определенный формулой (теорию интегрирования операторных функций см. в приложении Б.2)

$$T(\varphi)\,u = \int_G \varphi(x)\,T_x u\,\mathrm{d}x, \quad u \in H. \tag{12}$$

Обозначим через D_G линейное подпространство, натянутое на все векторы $u(\varphi) \equiv T(\varphi)\,u$, $u \in H$. Следовательно, для $u(\varphi) \in D_G$ имеем

$$T_y u(\varphi) = u(L_y\varphi).$$

В самом деле,

$$T_y u(\varphi) = \int_G \varphi(x)\,T_{yx} u\,\mathrm{d}x = \int_G \varphi(y^{-1}z)\,T_z u\,\mathrm{d}z = \int_G (L_y\varphi)(z)\,T_z u\,\mathrm{d}z. \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть T — представление группы Ли G в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1° *подпространство D_G плотно в H,*

2° *подпространство D_G является общей линейной инвариантной областью определения для генераторов однопараметрических подгрупп из G.*

Доказательство. 1°. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(G)$ с носителем K такая, что

$$\varphi \geqslant 0, \quad \int_K \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Тогда, согласно (12), для любого u из H имеем

$$u(\varphi) - u = \int_G \varphi(x)\,(T_x - I)\,u\,\mathrm{d}x.$$

Поэтому

$$\|u(\varphi) - u\| \leqslant \max_{x \in K} \|T_x u - u\|.$$

Следовательно, если K стягивается к единице e в G, то, согласно непрерывности T_x, $u(\varphi) \to u$. Поскольку u — произвольный вектор из H, то множество D_G векторов (2) плотно в H.

2°. Пусть $y(t) = \exp(tY)$ — однопараметрическая подгруппа в G. В силу инвариантности меры Хаара $\mathrm{d}x$ на G получаем

$$\int_G \varphi(y^{-1}(t)\,x)\,T_x u\,\mathrm{d}x = \int_G \varphi(x)\,T_{y(t)\,x} u\,\mathrm{d}x = T_{y(t)} \int_G \varphi(x)\,T_x u\,\mathrm{d}x.$$

Поэтому

$$t^{-1}(T_{y(t)} - I)\,u(\varphi) = \int_G t^{-1}[\varphi(y^{-1}(t)\,x) - \varphi(x)]\,T_x u\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Для всякого v из H функция $|t^{-1}[\varphi(y^{-1}(t)x) - \varphi(x)](T_x u, v)|$ интегрируема на G и предел при $t \to 0$ лежит в $C_0^\infty(G)$. Поэтому, используя теорему Лебега (приложение А.6), мы можем переставить $\lim\limits_{t\to 0}$ со знаком интеграла. Тогда при $t \to 0$ получаем

$$T(Y)\,u(\varphi) = u(\tilde{Y}\varphi), \tag{15}$$

где

$$(\tilde{Y}\varphi)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(y^{-1}(t)x) - \varphi(x)}{t} \in C_0^\infty(G) \tag{16}$$

задает действие левого регулярного представления алгебры L в пространстве $C_0^\infty(G)$. Поэтому для любого $u(\varphi)$ из D_G и любого генератора $T(Y)$ $T(Y)\,u(\varphi)$ также лежит в D_G. Это означает, что D_G является общей инвариантной плотной областью определения для всех элементов алгебры Ли L группы Ли G. Очевидно, что эта область линейна.

Область D_G называется *подпространством Гординга*.

Замечание 1. Отображение $Y \to \tilde{Y}$, заданное формулой (16), является представлением алгебры Ли L правыми инвариантными дифференциальными операторами первого порядка, действующими в $C_0^\infty(G)$.

Следствие 1. *Пусть L — алгебра Ли группы G, и пусть $x \to T_x$ — представление группы G. Тогда отображение $X \to T(X)$, $X \in L$, заданное формулой* (15), *является представлением алгебры L.*

Доказательство. Так как D_G является общим линейным плотным инвариантным подпространством в H и условие (3), очевидно, выполнено, достаточно проверить условие (4). В самом деле, согласно (15), имеем

$$T[X, Y]\,u(\varphi) = u([\tilde{X}, \tilde{Y}]\varphi) = u[(\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})\varphi] =$$
$$= T(X)\,u(\tilde{Y}\varphi) - T(Y)\,u(\tilde{X}\varphi) = (T(X)T(Y) - T(Y)T(X))\,u(\varphi) =$$
$$= [T(X), T(Y)]\,u(\varphi).$$

Замечание 2. В силу инвариантности D_G мы можем определить с помощью (15) действие любого элемента

$$M = \sum_{\substack{n \\ i_1 \cdots i_n}} a_{i_1 \ldots i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n}, \quad X_{i_r} \in L,$$

обертывающей алгебры E алгебры Ли L формулой

$$T(M)\,u(\varphi) = u(\tilde{M}\varphi), \quad M \in E, \tag{17}$$

где $\tilde{M}$ — «левый» дифференциальный оператор на $C_0^\infty(G)$, соответствующий элементу M из E. Поэтому представление $X \to T(X)$ алгебры L может быть расширено до представления $M \to T(M)$ обертывающей алгебры E.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть $x \to T_x$ — унитарное представление группы Ли G. Тогда операторы $\mathrm{i}T(X)$, $X \in L$, симметричны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in D_G$. Тогда

$$(\mathrm{i}T(X)u, v) = \lim_{t\to 0} t^{-1}((\mathrm{i}T_{x(t)} - I)u, v) = \lim_{t\to 0} t^{-1}(u, -\mathrm{i}(T^*_{x(t)} - I)v).$$

Так как для унитарного представления $T^*_{x(t)} = T^{-1}_{x(t)} = T_{x(t)^{-1}} = T_{x(-t)}$, мы получаем

$$(\mathrm{i}T(X)u, v) = \lim_{t\to 0} t^{-1}(u, -\mathrm{i}(T_{x(-t)} - I)v) =$$
$$= \lim_{s\to 0} s^{-1}(u, \mathrm{i}(T_{x(s)} - I)v) = (u, \mathrm{i}T(X)v).$$

Пусть T — представление группы G в H. Вектор u из H называют *бесконечно дифференцируемым* или *регулярным* вектором для T, если отображение $x \to T_x u$ из G в H принадлежит классу C^∞. Говорят, что вектор u из H *аналитичен* для T, если отображение $x \to T_x u$ из G в H аналитично. Каждый элемент $u(\varphi)$ из D_G является регулярным вектором для T. Действительно, используя те же аргументы, что и в доказательстве пункта 2° теоремы 1, для любого $n = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\partial_i^{(n)} T_x u(\varphi) = \partial_i^{(n)} \int_G \varphi(y) T_{xy} u \, \mathrm{d}y = \partial_i^{(n)} \int_G \varphi(x^{-1}y) T_y u \, \mathrm{d}y =$$
$$= \int_G \partial_i^{(n)} \varphi(x^{-1}y) T_y u \, \mathrm{d}y. \tag{18}$$

Поскольку $\partial_i^{(n)}\varphi(x^{-1}y) \in C_0^\infty$, то определены частные смешанные производные всех порядков и, следовательно, D_G является плотным множеством регулярных векторов для T. В § 4 и 6 мы опишем конструкцию Нельсона и Гординга плотного множества аналитических векторов для T.

Иногда удобно в качестве области определения операторов, представляющих заданную алгебру Ли L, брать подпространство D в H, отличное от подпространства Гординга D_G. Например:

1° Если T — квазирегулярное представление группы G на однородном пространстве G/H, то $D = C_{01}^\infty(G/H)$ — естественная область определения.

2° Если T — ограничение к G представления более широкой группы, то в качестве области определения может быть взято подпространство Гординга более широкого представления. Мы исполь-

зуем эту область для вывода результатов Нельсона—Стайнспринга (§ 2, следствия 1—5).

3° Если $H = L^2(\Omega)$ и L задана формальными дифференциальными операторами, то в качестве области определения для представления T алгебры L может быть взято подпространство $C_0^\infty(\Omega)$ или пространство Шварца S.

4° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с оператором $T(\Delta) = T(X_1)^2 + \cdots + T(X_d)^2$, $d = \dim L$ (§ 4). Мы используем эту область для решения задачи интегрируемости заданного кососимметрического представления алгебры Ли до глобального унитарного представления соответствующей группы Ли (§ 5).

5° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с генераторами Ли представления $T(L)$. Это пространство наиболее удобно в приложениях (§ 6).

6° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с решениями так называемого уравнения теплопроводности на группе Ли (§ 7).

§ 2. Представления обертывающих алгебр неограниченными операторами

Мы утверждали, что большинство наблюдаемых в квантовой теории и в физике частиц является элементами обертывающей алгебры. Чтобы гарантировать правильную интерпретацию измерений, мы требуем, чтобы эти наблюдаемые представлялись по крайней мере существенно самосопряженными операторами. Среди физиков широко распространена вера в то, что в унитарном представлении группы Ли элементы обертывающей алгебры всегда являются существенно самосопряженными операторами. Следующий контрпример фон Неймана (не опубликовано) показывает, что это не так.

Пример 1. Пусть G — трехмерная нильпотентная группа всех вещественных матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R^1. \tag{1}$$

Закон композиции в G задается формулой

$$[\alpha, \beta, \gamma][\alpha', \beta', \gamma'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \alpha\beta' + \gamma']. \tag{2}$$

Подгруппа $[0, 0, \gamma]$, $\gamma \in R^1$, является центром в G.