зуем эту область для вывода результатов Нельсона—Стайнспринга (§ 2, следствия 1—5).

3° Если $H = L^2(\Omega)$ и L задана формальными дифференциальными операторами, то в качестве области определения для представления T алгебры L может быть взято подпространство $C_0^\infty(\Omega)$ или пространство Шварца S.

4° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с оператором $T(\Delta) = T(X_1)^2 + \cdots + T(X_d)^2$, $d = \dim L$ (§ 4). Мы используем эту область для решения задачи интегрируемости заданного кососимметрического представления алгебры Ли до глобального унитарного представления соответствующей группы Ли (§ 5).

5° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с генераторами Ли представления $T(L)$. Это пространство наиболее удобно в приложениях (§ 6).

6° В качестве области определения может быть взято пространство аналитических векторов для представления T группы G, сопоставляемых с решениями так называемого уравнения теплопроводности на группе Ли (§ 7).

§ 2. Представления обертывающих алгебр неограниченными операторами

Мы утверждали, что большинство наблюдаемых в квантовой теории и в физике частиц является элементами обертывающей алгебры. Чтобы гарантировать правильную интерпретацию измерений, мы требуем, чтобы эти наблюдаемые представлялись по крайней мере существенно самосопряженными операторами. Среди физиков широко распространена вера в то, что в унитарном представлении группы Ли элементы обертывающей алгебры всегда являются существенно самосопряженными операторами. Следующий контрпример фон Неймана (не опубликовано) показывает, что это не так.

Пример 1. Пусть G — трехмерная нильпотентная группа всех вещественных матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R^1. \tag{1}$$

Закон композиции в G задается формулой

$$[\alpha, \beta, \gamma][\alpha', \beta', \gamma'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \alpha\beta' + \gamma']. \tag{2}$$

Подгруппа $[0, 0, \gamma]$, $\gamma \in R^1$, является центром в G.

Пусть $H = L^2(-\infty, \infty)$. Отображение

$$T_{[\alpha, \beta, \gamma]}u(x) = \exp[i\lambda(\gamma + x\beta)]\, u(x+\alpha), \quad u \in H, \tag{3}$$

определяет унитарное представление группы G в H. Согласно определению (1.11), мы находим, что генераторы однопараметрических подгрупп группы G, соответствующих параметрам α, β и γ, имеют вид

$$T(X) = d/dx, \quad T(Y) = i\lambda x, \quad T(Z) = i\lambda. \tag{4}$$

Например, для подгруппы $[0, \beta, 0]$, согласно (1.11) и (3), имеем

$$T(Y)\,u = \lim_{\beta \to 0} \frac{\exp(i\lambda x\beta)\, u - u}{\beta} = i\lambda x u. \tag{5}$$

Генераторы (4) удовлетворяют соотношению $[T(X), T(Y)] = T(Z)$, которое при $\lambda = -1$ эквивалентно гейзенберговым коммутационным соотношениям $[p, q] = -i$. Следовательно, обертывающая алгебра для G отображается на множество всех обычных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Хорошо известно, что многие из этих операторов симметричны, но не существенно самосопряжены.

Этот пример показывает, что унитарность представления группы не гарантирует того, что образы элементов обертывающей алгебры E представляются существенно самосопряженными операторами. Поэтому мы должны найти некоторый дополнительный критерий, который позволит определять, когда элемент M из E представляется существенно самосопряженным оператором $T(M)$.

Мы видели, что представители $iT(X)$, $X \in L(G)$, в унитарном представлении T группы G являются симметрическими операторами на области Гординга D_G (§ 1, Б, утверждение 2). Теперь мы расширим этот результат на определенные элементы обертывающей алгебры E алгебры Ли L. В дальнейшем мы будем иметь дело с универсальной обертывающей алгеброй правоинвариантной вещественной алгебры Ли L (гл. 3, § 3, Е).

Определим в E операцию $+$ формулой

$$M = \sum a_{i_1 \dots i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n} \to M^+ \equiv \sum_{\substack{n \\ i_1 \cdots i_n}} \bar{a}_{i_1 \dots i_n} X^+_{i_n} \cdots X^+_{i_1}, \tag{6}$$

где для каждого X из L

$$X^+ \equiv -X. \tag{7}$$

Отображение $M \to M^+$ определяет инволюцию в E. Говорят, что элемент M *симметричен* в E, если $M^+ = M$.

Утверждение 1. *Пусть*

$$M = \sum_{\substack{n \\ i_1 \cdots i_n}} a_{i_1 \cdots i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n} \in E. \tag{8}$$

Оператор $T(M)$, *определенный формулой* (1.17), *удовлетворяет соотношению*

$$(T(M)u, v) = (u, T(M^+)v), \quad u, v \in D_G. \tag{9}$$

В частности, если $M = M^+$ *в* E, *то* $T(M)$ — *симметрический оператор в* H.

Доказательство. Повторяем вывод утверждения 1.2 для произведения $X_{i_1}^+ \ldots X_{i_n}^+$ и в результате получаем

$$(T(M^+)u, v) = \left(\sum_{\substack{n \\ i_1 \cdots i_n}} \bar{a}_{i_1 \cdots i_n} T\left(X_{i_n}^+\right) \cdots T\left(X_{i_1}^+\right) u, v \right) =$$

$$= \left(u, \sum_{\substack{n \\ i_1 \cdots i_n}} a_{i_1 \cdots i_n} T(X_{i_1}) \cdots T(X_{i_n}) v \right) = (u, T(M)v). \tag{10}$$

Поэтому если $M^+ = M$, то $T(M)^* = T(M)$, т. е. $T(M)$ симметричен на D_G.

Выведем теперь критерий Нельсона—Стайнспринга, который позволяет определять, когда симметрический представитель $T(M)$ элемента M обертывающей алгебры E задан существенно самосопряженным оператором.

В этих рассмотрениях важную роль играют так называемые эллиптические элементы обертывающей алгебры. Говорят, что элемент L из E *эллиптичен*, если он эллиптичен как дифференциальный оператор в частных производных на G. Напомним, что формальный дифференциальный оператор

$$L(x, D) = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \sigma} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in G, \tag{11}$$

где

$$D^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \tag{12}$$

эллиптичен, если для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ σ-линейная форма

$$L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = \sigma} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi \neq 0, \tag{13}$$

отлична от нуля.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли, а $x \to T_x$ — унитарное представление группы G. Если L — эллиптический элемент правоинвариантной обертывающей алгебры для G, то*

$$\overline{T(L^+)} = (T(L))^*. \tag{14}$$

В частности, если L эллиптичен и симметричен, то $T(L)$ существенно самосопряжен (с. с. с.).

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай эллиптического элемента L, представимого в виде $L = K^+K$ при некотором $K \in E$. Для доказательства существенной самосопряженности $A \equiv T(L)$ объединим следующие два факта.

1. $(A + I)^{-1}$ ограничен. Чтобы показать это, заметим, что $(Au, u) \geqslant 0$ для всех u из подпространства Гординга D_G. В самом деле, поскольку отображение $X \to T(X)$ определяет представление алгебры E, то мы имеем $A = T(K^+K) = T(K^+)\,T(K)$. Таким образом, из утверждения 1 следует

$$(Au, u) = (T(K^+)\,T(K)\,u, u) = (T(K)\,u, T(K)\,u) \geqslant 0$$

для всех u из D_G. Следовательно,

$$((A + I)\,u, (A + I)\,u) = (Au, Au) + 2\,(Au, u) + (u, u) \geqslant (u, u) > 0.$$

Поэтому $(A + I)$ положительно определен, и на области определения оператора $(A + I)^{-1}$, состоящей из векторов $v = (A + I)\,u$,

$$\|(A + I)^{-1} v\|^2 \leqslant \|v\|^2,$$

т. е. $(A + I)^{-1}$ ограничен.

2. $A + I$ имеет плотную область значений. Чтобы показать это, предположим, что $u \in H$ ортогонален к области значений оператора $A + I$. Тогда

$$((A + I)\,T(\varphi)\,u, u) = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{15}$$

Из (1.17) следует, что для $M \in E$ $T(M)\,T(\varphi)\,u = T(\tilde{M}\varphi)\,u$. Поэтому (15) может быть записано в виде

$$\int_G [(\tilde{L} + 1)\,\varphi](x)\,(T_x u, u)\,dx = 0. \tag{16}$$

Это означает, что функция $f(x) = (T_x u, u)$ является слабым решением дифференциального уравнения в частных производных $(\tilde{L} + 1)\,f = 0$ на G. Поскольку $\tilde{L} + 1$ эллиптичен, функция $(T_x u, u)$ аналитична (см. [435]) и

$$(\tilde{L} + 1)\,(T_x u, u) = 0 \tag{17}$$

в обычном поточечном смысле. Поскольку функция $x \to (T_x u, u)$ положительно определена, при $u \neq 0$ из упражнения 3.11.3.4 имеем

$$((\tilde{L}+1)f)(e) = (\tilde{L}f)(e) + (u, u) > 0,$$

что противоречит соотношению (17). Поэтому $u = 0$ и, таким образом, $(A+I)^{-1}$ ограничен и плотно определен. Из этих двух фактов следует, что A с. с. с. (согласно лемме 5.3 из приложения Б).

Пусть теперь L — общий эллиптический элемент. Из предыдущего случая мы выводим, что $T(L^+L) = T(L^+)\,T(L)$ с. с. с. Отсюда получаем

$$\overline{T(L^+)} = T(L)^*$$

(согласно лемме 5.4 из приложения Б). Следовательно, если эллиптический элемент $L \in E$ симметричен (т. е. $L^+ = L$), то

$$\overline{T(L)} = (T(L))^*,$$

т. е. $T(L)$ существенно самосопряжен.

Более общий критерий для существенной самосопряженности элементов обертывающей алгебры дается следующей важной теоремой.

Теорема 3. *Пусть G — группа Ли и пусть T — унитарное представление группы G. Пусть L — эллиптический элемент правоинвариантной обертывающей алгебры E для G, такой, что $L^+ = L$. Если M — произвольный элемент из E, такой, что $T(M^+M)$ коммутирует с $T(L)$, то*

$$\overline{T(M^+)} = T(M)^*. \tag{18}$$

В частности, если, кроме того, M симметричен, то $T(M)$ существенно самосопряжен.

Доказательство. Пусть r — положительное целое число, большее чем порядок дифференциального оператора $\tilde{M}$, соответствующего элементу M из E, и пусть $A = T(L^{2r})$, $B = T(\tilde{M}^+\tilde{M})$ $(= T(\tilde{M}^+)\,T(\tilde{M}))$ и $C = A + B$. Тогда L^{2r} эллиптичен, так как L эллиптичен; $L^{2r} + \tilde{M}^+\tilde{M}$ эллиптичен, так как порядок L^{2r} больше, чем порядок $\tilde{M}^+\tilde{M}$. Следовательно, A и C — представители эллиптических симметрических операторов из E, и поэтому, согласно теореме 2, они с. с. с. Более того, эти операторы коммутируют на области Гординга.

Покажем теперь, что замыкания $\bar{A}$ и $\bar{C}$ также коммутируют, т. е. эти операторы имеют взаимно коммутирующие спектральные разложения. Чтобы увидеть это, заметим, что ограниченные

операторы $(1+A)^{-1}(1+C)^{-1}$ и $(1+C)^{-1}(1+A)^{-1}$ совпадают на их общей области определения, т. е. на области значений оператора $(1+A)(1+C)=(1+C)(1+A)$. Более того, оператор $(1+A)(1+C)$ является представителем симметрического эллиптического оператора, и по теореме 2 он с. с. с. Он также имеет плотную область значений. Это следует из того факта, что оператор $D \equiv A+C+AC$ положительно определен. Поэтому оператор $I+\overline{D}$ положительно определен и самосопряжен. Следовательно, $(I+\overline{D})^{-1}$ ограничен. Отсюда получаем, что область значений $R(I+\overline{D})=R(\overline{I+D})=H$, т. е. $R(I+D)$ плотна в H. Следовательно, $\overline{A}$ и $\overline{C}$ коммутируют.

Докажем теперь основную часть теоремы, а именно что $\overline{T(M^+)}=T(M)^*$. Заметим сначала, что, согласно утверждению 1, $T(M^+)\subset(T(M))^*$. Поэтому если мы сможем показать, что оператор $B=T(M^+)\,T(M)$ с. с. с., то утверждение теоремы будет следовать из леммы 5.4 приложения Б. Положим $B_1=\overline{C}-\overline{A}$. Чтобы показать, что B с. с. с., покажем сначала, что $B_1\subset\overline{B}$. Пусть $v\in D(B_1)=D(\overline{A})\cap D(\overline{C})$. Можно выбрать последовательность $\{v_n\}_1^\infty$, такую, что

$$D_G\ni v_n\to v \quad \text{и} \quad Cv_n\to\overline{C}v, \tag{19}$$

так как $\overline{C}$ — замыкание оператора C. Для произвольного u из D_G имеем $\|Au\|\leqslant\|Cu\|$. Действительно, так как $A=T(L^r)\,T(L^r)$ и операторы $T(L)$ и $T(M^+M)$ коммутируют, имеем

$$(Cu,\ Cu)=(Au,\ Au)+(Bu,\ Bu)+2(BT(L^r)u,\ T(L^r)u).$$

Здесь второе и третье слагаемые положительны (поскольку B положительно определен) и, следовательно, $\|Cu\|\geqslant\|Au\|$. Положив $u=v_n-v_m$, получаем

$$\|Av_n-Av_m\|\leqslant\|Cv_n-Cv_m\|\to 0 \quad \text{при} \quad m>n\to\infty.$$

Поэтому последовательность $\{Av_n\}$ сходится и

$$Av_n\to\overline{A}v, \tag{20}$$

так как $\overline{A}$ замкнут. Используя (19) и (20), получаем

$$Bv_n=Cv_n-Av_n\to\overline{C}v-\overline{A}v=B_1v.$$

Следовательно, при $v\in D(B_1)$ $B_1v=\overline{B}v$, т. е. $B_1\subset\overline{B}$. Оператор B_1 с. с. с. по лемме 5.4 из приложения Б:

$$\overline{B}_1=B_1^*\supset B^*\supset\overline{B}\supset\overline{B}_1;$$

следовательно, мы имеем $\overline{B^*}=\overline{B}$, т. е. B с. с. с.

Теорема 3 имеет ряд следствий, определяющих, когда элемент M из обертывающей алгебры E представляется существенно самосопряженным оператором.

Ниже важную роль играет так называемый *оператор Нельсона* Δ:

$$\Delta = X_1^2 + \cdots + X_d^2, \quad d = \dim L, \tag{21}$$

где X_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, — генераторы группы G. Этот оператор эллиптичен. В самом деле, так как $X_i = a_{ik}(x)\,\partial^k$, то, согласно (13), имеем

$$\Delta(x, \xi) = a_{ik}(x)\, a_{ik'}(x)\, \xi^k \xi^{k'} = b^2 > 0, \tag{22}$$

где $b_i(x) = a_{ik}(x)\,\xi^k$.

Следствие 1. *Пусть G — абелева или компактная группа Ли. Тогда представитель $T(M)$ произвольного элемента M обертывающей алгебры E удовлетворяет условию* (18), *т. е.*

$$\overline{T(M^+)} = (T(M))^*.$$

В частности, если $M^+ = M$, то $T(M)$ существенно самосопряжен.

Доказательство. Обертывающая алгебра каждой абелевой алгебры Ли содержит эллиптический симметрический элемент вида

$$\Delta_0 = X_1^2 + \cdots + X_d^2,$$

который, очевидно, лежит в центре алгебры E. Поэтому по теореме 3 каждый элемент M из E с. с. с.

Каждая компактная группа Ли является прямым произведением ее центра G_0 и инвариантных простых подгрупп G_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ (см. теорему 3.8.2). Оператор

$$\Delta^{(i)} = (X_1^{(i)})^2 + (X_2^{(i)})^2 + \ldots + \left(X_{d_i}^{(i)}\right)^2, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$$d_i = \dim G_i,$$

записанный в базисе, в котором метрический тензор Картана алгебры Ли группы G_i диагонален, является центральным симметрическим эллиптическим элементом обертывающей алгебры E_i группы G_i, $i = 0, 1, \ldots, N$. Таким образом, оператор $\Delta = \sum_{i=0}^{N} \Delta^{(i)}$ является центральным симметрическим эллиптическим элементом обертывающей алгебры E группы G. Следовательно, по теореме 3 для каждого M из E имеем

$$\overline{T(M^+)} = (T(M))^*.$$

Тогда если $M^+ = M$, то $T(M)$ с. с. с.

Рассмотрим теперь случай некомпактных полупростых групп Ли. В этом случае мы имеем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть G — некомпактная полупростая группа Ли, K — максимальная компактная подгруппа в G, и пусть*

$$\Delta_K = \sum_{i=1}^{\dim K} X_i^2$$

— оператор Казимира второго порядка подгруппы K. Тогда представитель $T(M)$ любого элемента M обертывающей алгебры E для группы G, который коммутирует с Δ_K, удовлетворяет условию $\overline{T(M^+)} = (T(M))^*$.

Замечание. В частности, все симметрические операторы Казимира группы G или подгруппы $G_i \supset K$ существенно самосопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из теоремы 1.2.7 следует, что метрический тензор Картана алгебры Ли группы G может быть диагонализирован. Поэтому оператор Казимира второго порядка группы G имеет вид $C_2 = -\Delta_K + \Delta_P$, где

$$\Delta_P = \sum_{\dim K+1}^{\dim L} X_i^2.$$

Соответствующий оператор Нельсона $\Delta = (\Delta_K + \Delta_P)$ эллиптичен и симметричен на G [см. (22)]. Поскольку $-\Delta_K + \Delta_P$ централен в E, любой элемент M из обертывающей алгебры E для G, который коммутирует с Δ_K, также коммутирует с $(\Delta_K + \Delta_P) = C_2 + 2\Delta_K$. Следовательно,

$$[M^+, (\Delta_K + \Delta_P)] = [M, (\Delta_K + \Delta_P)]^+ = 0.$$

Поэтому, согласно теореме 3,

$$\overline{T(M^+)} = (T(M)).$$

В общем случае имеем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть G — произвольная группа Ли, и пусть M — центральный элемент в E. Тогда $\overline{T(M^+)} = T(M)^*$. В частности, если $M^+ = M$, то $T(M)$ существенно самосопряжен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент M из E коммутирует с симметрическим эллиптическим элементом Δ, заданным формулой (21). Следовательно, $[M^+, \Delta] = [\Delta, M]^+ = 0$. Поэтому данное утверждение следует из теоремы 3.

Замечание. Если M и N — центральные и симметрические элементы из E, то в силу следствия 3 и формулы (1.17) операторы $T(M)$ и $T(N)$ с. с. с.

Однако заранее не очевидно, что самосопряженные операторы $\overline{T(M)}$ и $\overline{T(N)}$ сильно коммутируют и коммутируют ли операторы

$\overline{T(M)}$ и T_x, $x \in G$. Эти важные задачи решаются в § 5 после разработки критерия коммутативности (теорема 5.3).

Следующее следствие показывает, что представители всех генераторов, сопоставляемые с унитарным представлением группы G, существенно самосопряжены, т. е. они имеют собственные спектральные свойства. Этот факт важен для физических приложений.

Следствие 4. *Пусть $x \to T_x$ — унитарное представление произвольной группы Ли G. Пусть X — произвольный элемент алгебры Ли группы G, а $p(X)$ — любой вещественный полином. Тогда оператор $T(p(\mathrm{i}X))$ существенно самосопряжен* на D_G. *В частности, $T(\mathrm{i}X)$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. Элемент $p(\mathrm{i}X)$ является симметрическим элементом обертывающей алгебры однопараметрической (а следовательно, абелевой) подгруппы G_1, порожденной элементом X: $((p(\mathrm{i}X))^+ = p(\mathrm{i}X)$. Поэтому, согласно следствию 1, представитель $T(p(\mathrm{i}X))$ с. с. с. на области Гординга D_G. В частности, представитель элемента $p(\mathrm{i}X) = \mathrm{i}X$ с. с. с.

Следует подчеркнуть, что в унитарном представлении группы Ли симметрические элементы обертывающей алгебры не обязательно представляются существенно самосопряженными операторами на подпространстве Гординга. Чтобы проиллюстрировать этот важный факт, рассмотрим следующий простой контрпример.

Пример 2. Пусть G — двухпараметрическая группа преобразований $x' = ax + b$, $a > 0$, вещественной прямой R, и пусть $H = L^2(-\infty, +\infty)$. Унитарное представление группы G в H задается формулой

$$(T_g u)(x) = a^{-1/2} u\left(\frac{x+b}{a}\right), \quad u \in H. \tag{23}$$

Генераторы однопараметрических подгрупп задаются формулами

$$T(X) = \mathrm{d}/\mathrm{d}x, \quad T(Y) = \mathrm{i}\exp x. \tag{24}$$

Симметрический элемент $M = XY + YX$ в обертывающей алгебре E группы G имеет представителя $T(XY + YX) = 2\mathrm{i}e^x \mathrm{d}/\mathrm{d}x + \mathrm{i}e^x$, который, согласно утверждению 2.1, является симметрическим оператором. Чтобы проверить, что M с. с. с. или может быть расширен до с. с. с. оператора, нам следует найти его индексы дефекта согласно теореме 1.4 приложения Б. Решая дифференциальное уравнение первого порядка $M^* u_\pm = \pm \mathrm{i} u_\pm$, получаем

$$\begin{aligned} D_+ &= \left\{C \exp\left[-\frac{1}{2}(x + \exp(-x))\right]\right\}, \\ D_- &= \{0\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Множество D_- тривиально, так как второе решение

$$u_- = C \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \exp(-x)\right]$$

не лежит даже в $L^2(-\infty, +\infty)$. Поэтому индексы дефекта совпадают с (1, 0) и, следовательно, по теореме приложения Б.1.4 оператор $T(XY + YX)$ не имеет самосопряженных расширений.

Следует также подчеркнуть, что все вышеизложенные результаты справедливы при предположении, что представление алгебры Ли получено из заданного унитарного представления соответствующей группы Ли согласно соотношению (1.11). Эти результаты могут быть не верны, если мы имеем представление алгебры Ли, которое не интегрируется до глобально-унитарного представления соответствующей группы Ли. Пример рассматривается в гл. 21, § 5.

Дадим теперь интересное приложение теории представлений групп и оператора Нельсона в квантовой механике. Хорошо известно, что одной из основных задач квантовой механики является построение области определения $D \subset H$, на которой оператор энергии самосопряжен. Приведем пример, который дает решение этой задачи, использующее теоретико-групповую технику.

Пример 3. Пусть $X_1 = \partial/\partial x$, $X_2 = \mathrm{i}x$, $X_3 = \mathrm{i}\lambda x^2$ и $X_4 = \mathrm{i}I$ — кососимметрический базис алгебры Ли L на $L^2(R^1)$ с $\lambda \in R^1$. Очевидно, что L нильпотентна с очевидными коммутационными соотношениями и что подалгебра $\tilde{L}$, порожденная элементами X_2, X_3 и X_4, инвариантна. Из теоремы 3.5.1 мы знаем, что каждый групповой элемент нильпотентной группы Ли G, сопоставляемой с L, может быть записан в виде произведения элементов однопараметрических подгрупп. Так как все однопараметрические подгруппы в $L^2(R^1)$, порожденные операторами X_k, унитарны, то отображение

$$g(\alpha) \to T_{g(\alpha)} = e^{\alpha_1 X_1} e^{\alpha_2 X_2} e^{\alpha_3 X_3} e^{\alpha_4 X_4} \tag{26}$$

задает унитарное представление группы G в $L^2(R^1)$.

В силу (22) и (6) оператор Нельсона Δ эллиптичен и симметричен. Поэтому в силу теоремы 2 оператор

$$T(\Delta) = \sum_{k=1}^{4} T(X_k)^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x^2 - \lambda x^4 - I$$

существенно самосопряжен на области Гординга D_G для представления (26). Отсюда следует, что оператор энергии для ангармонического осциллятора, который совпадает с $-T(\Delta) - I$, также существенно самосопряжен на D_G.

Очевидно, что этот метод может быть обобщен на большой класс операторов энергии $H = H_0 + V$ с потенциалом $V(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{2k}$.

§ 3. Аналитические векторы и аналитическая доминантность

В этом параграфе вводятся два фундаментальных понятия: понятие аналитических векторов и понятие аналитической доминантности.

В разделе А мы рассматриваем основные свойства аналитических векторов для неограниченных операторов и, в частности, доказываем, что каждый самосопряженный оператор имеет плотное множество аналитических векторов. В разделе Б мы развиваем исчисление абсолютных значений операторов, которое служит основой для теории аналитической доминантности операторов.

В разделе В доказывается основная теорема исчисления абсолютных значений и вводится с его помощью понятие аналитической доминантности.

Наконец, мы развиваем теорию аналитической доминантности для операторов, составляющих алгебру Ли.

А. *Аналитические векторы*

Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H. Элемент $u \in H$ называют *аналитическим вектором для* A, если $\exp(As)\,u$ разлагается в ряд с положительным радиусом абсолютной сходимости, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n u\|}{n!} s^n < \infty \tag{1}$$

для некоторого вещественного $s > 0$. Если A ограничен, т. е. $\|Au\| \leqslant C\|u\|$ для каждого $u \in H$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n u\| s^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n s^n = \exp(Cs) < \infty.$$

Поэтому для ограниченного оператора A каждый вектор u из H является аналитическим вектором для A. Таким образом, представляют интерес только аналитические векторы для неограниченных операторов.