$\leqslant \| \Delta u \| + \| u \|$, $(\mathrm{ad}\ \xi)^n \alpha' < c^n \alpha \leqslant c^n \alpha'$. Поэтому $|\Delta| + |I|$ также аналитически доминирует над ξ.

Замечание. Лемма 6 может быть обобщена. Можно показать, что если B лежит в $E^{(2m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то для некоторого $k < \infty$

$$|B| \leqslant k\alpha^m,$$

где $\alpha^m = |(\Delta - I)^m|$. Более того, если оператор, соответствующий $\eta = |Y_1| + \ldots + |Y_l|$, лежит в $E^{(2m)}$ и $\mathrm{ad}\ Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, отображает $E^{(2m)}$ на себя, то α^m аналитически доминирует η (см. [628], лемма 6.3). Однако мы не нуждаемся в этом результате.

§ 4. Аналитические векторы для унитарных представлений групп Ли

В § 1 мы показали, что каждое представление T группы Ли G приводит естественным образом к представлению ее алгебры Ли L, определенному на подпространстве Гординга D_G. Однако это соответствие в таком виде не является вполне удовлетворительным. Действительно, может оказаться, что подпространство $D \subset D_G$ (или само D_G), которое инвариантно при действии алгебры Ли L, не инвариантно для G. Например, если G — однопараметрическая группа трансляций, представленная в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$ формулой $T_x f(y) = f(x + y)$, то каждое подпространство $C_0^\infty(0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, инвариантно при действии оператора $X = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ алгебры Ли. Однако очевидно, что они не инвариантны при действии группы трансляций.

В общем дело в том, что ряд Тейлора регулярных функций не обязательно сходится к регулярной функции. В самом деле, на подпространстве Гординга для генератора X_i из L, φ из $C_0^\infty(G)$ и $u(\varphi)$ из D_G вектор

$$T(X_i)^n u(\varphi) = u(\tilde{X}_i^n \varphi) \tag{1}$$

является регулярным вектором для представления T группы G, так как $T_x u(\tilde{X}_i^n \varphi) = \int (\tilde{X}_i^n \varphi)(x^{-1}y)\, T_y u \mathrm{d}y$, но разложение

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} T(X_i)^n u(\varphi) = \int \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \tilde{X}_i^n \varphi(l)\, T_x u\, \mathrm{d}x \tag{2}$$

в общем случае не сходится при $N \to \infty$. Те векторы u из H, для которых разложение $\sum \frac{t^n}{n!} T(X_i)^n u$, $i = 1, 2, \ldots, \dim L$, сходится, представляют особый интерес и, согласно § 3, называются *аналитическими векторами* для представителей $T(X_i)$. Правильно выбранные аналитические векторы гарантируют удовлетворитель-

ную связь между представлениями L и G в H. Мы покажем, в частности, что инвариантные подпространства аналитических векторов относительно $T(L)$ являются также инвариантными подпространствами аналитических векторов относительно $T(G)$ и обратно.

Этот параграф посвящен анализу свойств аналитических векторов для унитарных представлений групп Ли. Сначала мы установим связь между аналитическими векторами для представления $x \to T_x$ группы и аналитическими векторами для операторов $T(X)$, $X \in L$, в смысле соотношения (3.1).

ЛЕММА 1. *Пусть $x \to T_x$ — представление группы Ли G в гильбертовом пространстве H. Пусть $X_1, \ldots, X_d$, $d = \dim L$, — базис для алгебры Ли L группы G, и пусть $\xi = |T(X_1)| + \ldots + |T(X_d)|$. Тогда если $u \in H$ — аналитический вектор для ξ, то u — аналитический вектор для представления T группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $T_x u$ аналитичен в окрестности точки e в G, то $T_x u$ аналитичен всюду. В самом деле,

$$T_x u = T_y T_{y^{-1}x} u$$

аналитичен, если элемент x близок к фиксированному элементу $y \in G$. Более того, мы знаем, что экспоненциальное отображение является аналитическим изоморфизмом окрестности точки 0 в L с окрестностью точки e в G (см. теорему 3.10.1). Поэтому достаточно доказать, что если $u \in H$ — аналитический вектор для ξ, то $X \to T_{\exp X} u$ аналитично в некоторой окрестности точки 0 в L. Пусть $X = X_1 t_1 + \ldots + X_d t_d$. Тогда $T_{\exp X} u$ аналитичен в некоторой окрестности точки 0 в L тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = n} \|\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_d}\| t_1^{\alpha_1} \ldots t_d^{\alpha_d} < \infty \tag{3}$$

для достаточно малых $t_1, \ldots, t_d$, где $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ — коэффициент при $t_1^{\alpha_1} \ldots t_d^{\alpha_d}$ в разложении для $\exp[T(X_1) t_1 + \ldots + T(X_d) t_d] u$. Используя (3.15), видим, что $\|\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_d}\|$ является нормой суммы нескольких выражений, которые также появляются в разложении $\|\exp(\xi s) u\|$, если мы положим $t_1 = \ldots = t_d = s$. Поэтому левая часть (3) $\leqslant \|\exp(\xi s) u\|$, когда $s = \max(|t_1|, \ldots, |t_d|)$; следовательно, она $< \infty$ по нашему предположению.

Замечание 1. Приведенный результат может быть усилен. Можно показать, что вектор $u \in H$ является аналитическим вектором тогда и только тогда, когда u аналитичен для представления T группы G (см. [628], лемма 7.1).

Докажем теперь два основных свойства множества аналитических векторов для унитарного представления T группы Ли G.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $x \to T_x$ — унитарное представление группы Ли G в гильбертовом пространстве H. Тогда множество A_T аналитических векторов для T плотно в H. Если $X_1, \ldots, X_d$ — базис алгебры Ли L группы G и $\Delta = X_1^2 + \ldots + X_d^2$, то любой аналитический вектор для $\overline{T(\Delta)}$ является аналитическим вектором для представления T группы G, и множество $A_{T(\Delta)}$ таких векторов плотно в H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, обозначает образы генераторов X_i алгебры L, и пусть $T(\Delta) = T(X_1)^2 + \ldots + T(X_d)^2$. По утверждению 1.2 $T(X_i)$ кососимметричен на области Гординга D_G и по теореме 2.3 $T(\Delta)$ существенно самосопряжен.

Положим $\tilde{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\overline{T(\Delta)^n})$. По (3.43) каждый вектор из $\tilde{D}$ лежит в $D(\overline{T(X_{i_1})} \ldots \overline{T(X_{i_n})})$ для всех конечных последовательностей $i_1, \ldots, i_n$. По теореме Стоуна область определения $D(\overline{T(X)})$ для X из L является множеством всех векторов u из H, для которых предел (т. е. производная) в (1.11) существует. Следовательно, если u лежит в $\tilde{D}$, то u лежит в $D(\overline{T(X)})$, поэтому $T_x u$ имеет все частные производные в $x = e$. Внутренний автоморфизм $y \to xyx^{-1}$ в G порождает внутренний автоморфизм

$$X \to \mathrm{Ad}_x(X) = xXx^{-1} \tag{4}$$

в алгебре Ли L группы G [см. (3.3.28)]. Поэтому для образов (относительно T) имеем

$$\overline{T(X)}\, T_x u = T_x (T_{x^{-1}} \overline{T(X)}\, T_x)\, u = T_x \overline{T(Y)}\, u, \tag{5}$$

где $Y = \mathrm{Ad}_{x^{-1}}(X)$. Для X', X'' из L имеем

$$\overline{T(X'')}\, \overline{T(X')}\, T_x u = T_x \overline{T(Y'')}\, \overline{T(Y')}\, u$$

и подобное выражение для произвольных произведений $\overline{T(X_{i_1})} \ldots \overline{T(X_{i_n})}$. Таким образом, $T_x u$ имеет частные производные всех порядков для всех x из G и u из $\tilde{D}$. Следовательно, $\tilde{D}$ содержится в пространстве $\tilde{D}_G$ всех бесконечно дифференцируемых векторов. Ясно, что $\tilde{D}_G \supset D_G$. Если u лежит в $\tilde{D}_G$, то u лежит в $D(\overline{T(\Delta)^n})$ для любого n; следовательно, $u \in \tilde{D}$. Поэтому $\tilde{D} \supset \tilde{D}_G$ и, следовательно, $\tilde{D} = \tilde{D}_G$. Любой аналитический вектор для $\overline{T(\Delta)}$ лежит в $\tilde{D}$, и, следовательно, он является аналитическим вектором для $T(\Delta)$. Оператор $\overline{T(\Delta)}$ самосопряжен, и поэтому по лемме 3 он имеет плотное множество аналитических векторов. Так как, согласно лемме 3.7, $\alpha = |T(\Delta) - I|$ аналитически доминирует над ξ, то это все аналитические векторы для ξ и по

лемме 1 они являются аналитическими векторами для представления T группы G.

Пример 1. Пусть G — трехмерная нильпотентная группа из примера 2.1, и пусть

$$T_{[\alpha\beta\gamma]}u(x) = \exp[-i(\gamma + x\beta)]\, u(x + \alpha) \tag{6}$$

— унитарное представление группы G в $L^2(-\infty, +\infty)$. Тогда генераторы однопараметрических подгрупп имеют вид

$$P = \frac{d}{dx}, \quad Q = -ix, \quad C = -iI. \tag{7}$$

Они удовлетворяют коммутационному соотношению Гейзенберга $[P, Q] = -iI$. В качестве общей плотной инвариантной области определения D для алгебры Ли (7) возьмем пространство Шварца S C^∞-функций $u(x)$ с

$$\sup\left|x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\beta u(x)\right| < \infty, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots.$$

Вычислим плотное множество аналитических векторов для оператора $T(\Delta) = P^2 + Q^2 + C^2$. Единичный оператор $-C^2$ в $T(\Delta)$ может быть отброшен, так как каждый аналитический вектор для $T(\Delta)$ аналитичен для

$$T(\Delta') = P^2 + Q^2 = \frac{d^2}{dx^2} - x^2. \tag{8}$$

Операторы (8) имеют тот же вид, что и гамильтониан для одномерного гармонического осциллятора. Хорошо известно, что нормализованные на единицу собственные функции $u_n(x)$ оператора $T(\Delta')$ могут быть выражены через полиномы Эрмита, т. е.

$$u_n(x) = (\sqrt{\pi}\, 2^n n!)^{-1/2} \exp(-x^2/2)\, H_n(x). \tag{9}$$

Они соответствуют собственным значениям $\lambda_n = 2n + 1$ (см. [587], стр. 492). Эти собственные функции являются аналитическими векторами для $T(\Delta')$. В самом деле, для $s < \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T(\Delta')^k u_n\| s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda_n s)^k = \exp(\lambda_n s) < \infty.$$

Множество $\{u_n(x)\}$ образует полное ортонормированное множество в $L^2(-\infty, +\infty)$. Поэтому в силу теоремы 2 конечная линейная оболочка $A_{T(\Delta)}$ функций $\{u_n(x)\}$ дает плотное множество аналитических векторов для представления (6) группы G.

Каждая собственная функция $u_n(x)$ лежит в пространстве Шварца S, которое является областью определения D для $T(L)$. Более того, из элементарных свойств полиномов Эрмита следует

$$\begin{aligned} Pu_n &= -\left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2} u_{n+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} u_{n-1}, \\ Qu_n &= -\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2} u_{n+1} - \mathrm{i}\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} u_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Поэтому плотное подпространство $A_{T(\Delta)}$ аналитических векторов для $T(\Delta)$ является общей инвариантной плотной областью определения для представления (7) алгебры Ли коммутационных соотношений Гейзенберга.

Доказательство леммы 3.1 дает метод явного построения плотного множества аналитических векторов для $\overline{T(\Delta)}$. Пусть $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы для $\overline{T(\Delta)}$, а $\delta = [a, b]$ пробегает ограниченные интервалы в R^1. Тогда векторы вида $E(\delta)u$, $u \in H$, составляют плотное множество аналитических векторов для $\overline{T(\Delta)}$.

Мы уже видели, что при подходящем выборе плотное множество A_{T_G} аналитических векторов для представления $x \to T_x$ группы G образует общую плотную инвариантную область определения для представления $X \to T(X)$ алгебры Ли L группы G и ее обертывающей алгебры E и каждый элемент из A_{T_G} лежит в $A_{T(\Delta)}$ [см. (7.32)].

Если мы возьмем в качестве общей плотной инвариантной области определения для представления $X \to T(X)$ алгебры Ли L плотное множество A_{T_G} аналитических векторов для представления $x \to T_x$ группы G, то будем иметь удовлетворительную связь между инвариантными замкнутыми подпространствами для алгебры Ли и для группы Ли. В самом деле, если $D \subset A_{\overline{T(\Delta)}}$ — инвариантное замкнутое подпространство для алгебры Ли, то для любых $T(X)$ из L и u из D $T(X)^n u$ лежит в D и, следовательно,

$$T_{\exp(hX)} u = \exp[hT(X)]\, u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} T(X)^n u \tag{11}$$

сходится и дает элемент из D. Поэтому D также инвариантно относительно представления T группы G. Обратно, если D — замкнутое подпространство, инвариантное относительно G и содержащее плотное инвариантное множество A аналитических векторов, то A

также инвариантно относительно алгебры Ли L. В самом деле, согласно (11), для любых $h > 0$ и u из A имеем

$$\frac{T_{\exp(hX)}u - u}{h} = T(X)u + hT(X)^2u + \cdots \in D. \tag{12}$$

Устремив $h \to 0$, получаем $T(X)u \in D$.

§ 5. Интегрируемость представлений алгебр Ли

В квантовой теории и физике мы используем обычно непосредственно представления алгебр Ли. Однако во многих задачах глобальные групповые преобразования сами имеют прямое физическое значение. Например, если группа G содержит физическую группу Пуанкаре П как подгруппу, то (унитарные) представители T_x для $x \in$ П описывают изменения заданной физической системы, соответствующие изменениям системы отсчета. Таким образом, во многих случаях нас интересуют те представления алгебры Ли, которые могут быть проинтегрированы до глобального (унитарного) представления группы G. Имеется много примеров, в которых глобальные представления привносят новые физические связи, показывая, что природа использует скорее представления групп, чем алгебр Ли.

В этом параграфе мы даем фундаментальную теорему Нельсона, которая устанавливает, когда представление алгебры Ли L кососимметрическими операторами может соответствовать унитарному представлению односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли.

Рассмотрим сначала связь этой задачи с аналитическими векторами.

Лемма 1. *Пусть алгебра Ли L представлена кососимметрическими операторами в гильбертовом пространстве H, имеющими общую инвариантную плотную область определения D. Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — операторный базис для L, $\xi = |X_1| + \ldots + |X_d|$. Если при некотором $s > 0$ множество векторов u из D, для которых $\|\exp(\xi s)u\| < \infty$, плотно в H, то на H существует единственное унитарное представление T односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли, такое, что для всех X из L $\overline{T(X)} = \overline{X}$.*

Доказательство. Условие $\|\exp(\xi s)u\| < \infty$ при некотором $s > 0$ означает, что u является аналитическим вектором для ξ. Поскольку любой аналитический вектор для ξ является аналитическим вектором для элемента $X \in L$, мы заключаем, что любой $X \in L$ имеет плотное множество аналитических векторов. Следовательно, согласно замечанию 1 к лемме 3.1, оператор $i\overline{X}$ самосопряжен.