также инвариантно относительно алгебры Ли L. В самом деле, согласно (11), для любых $h > 0$ и u из A имеем

$$\frac{T_{\exp(hX)}u - u}{h} = T(X)u + hT(X)^2u + \cdots \in D. \tag{12}$$

Устремив $h \to 0$, получаем $T(X)u \in D$.

§ 5. Интегрируемость представлений алгебр Ли

В квантовой теории и физике мы используем обычно непосредственно представления алгебр Ли. Однако во многих задачах глобальные групповые преобразования сами имеют прямое физическое значение. Например, если группа G содержит физическую группу Пуанкаре П как подгруппу, то (унитарные) представители T_x для $x \in$ П описывают изменения заданной физической системы, соответствующие изменениям системы отсчета. Таким образом, во многих случаях нас интересуют те представления алгебры Ли, которые могут быть проинтегрированы до глобального (унитарного) представления группы G. Имеется много примеров, в которых глобальные представления привносят новые физические связи, показывая, что природа использует скорее представления групп, чем алгебр Ли.

В этом параграфе мы даем фундаментальную теорему Нельсона, которая устанавливает, когда представление алгебры Ли L кососимметрическими операторами может соответствовать унитарному представлению односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли.

Рассмотрим сначала связь этой задачи с аналитическими векторами.

Лемма 1. *Пусть алгебра Ли L представлена кососимметрическими операторами в гильбертовом пространстве H, имеющими общую инвариантную плотную область определения D. Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — операторный базис для L, $\xi = |X_1| + \ldots + |X_d|$. Если при некотором $s > 0$ множество векторов u из D, для которых $\|\exp(\xi s)u\| < \infty$, плотно в H, то на H существует единственное унитарное представление T односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли, такое, что для всех X из L $\overline{T(X)} = \overline{X}$.*

Доказательство. Условие $\|\exp(\xi s)u\| < \infty$ при некотором $s > 0$ означает, что u является аналитическим вектором для ξ. Поскольку любой аналитический вектор для ξ является аналитическим вектором для элемента $X \in L$, мы заключаем, что любой $X \in L$ имеет плотное множество аналитических векторов. Следовательно, согласно замечанию 1 к лемме 3.1, оператор $i\overline{X}$ самосопряжен.

Пусть exp — экспоненциальное отображение в том смысле, как оно определено для групп Ли (гл. 3, § 10, А), и пусть N — окрестность точки e в G, такая, что exp является взаимно однозначным отображением из окрестности точки 0 в L на N. Для $x = \exp X$ из N мы определяем T_x как унитарный оператор $\exp \overline{X}$.

Пусть X, Y и Z лежат в L, и предположим, что $\exp X \exp Y = \exp Z$ в G. Тогда два степенных ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^n, \quad \sum_{k,\ l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} X^k Y^l$$

формально совпадают. Следовательно, если u такой вектор, что $\|\exp(|X|+|Y|)u\| < \infty$, $\|\exp(|Z|)u\| < \infty$, то $\exp(\overline{X})\exp(\overline{Y})u = \exp(\overline{Z})u$, т. е. $T_{\exp Z}u = T_{\exp X}T_{\exp Y}u$. Теперь для достаточно близких к нулю X, Y, Z из L (таких, что абсолютные значения координат $\leqslant s/2$) существует (по нашему предположению) плотное множество векторов $u \in D$, таких, что $\|\exp(|X|+|Y|)u\| < \infty$ и $\|\exp(|Z|)u\| < \infty$. Следовательно, если x и y из G достаточно близки к e, то $T_x T_y = T_{xy}$. Это означает, что в окрестности точки e отображение $x \to T_x$ определяет унитарный гомоморфизм локальной группы. Этот гомоморфизм сильно непрерывен. В самом деле, когда $X \to 0$ в L, то $\|\exp(X)u - u\| \to 0$ на плотном множестве, так как, согласно нашему предположению, $\|\exp(\xi s)u\| < \infty$ на плотном множестве. Более того, поскольку множество $\{T_x\}$ равномерно ограничено, $\|T_x\| = 1$, сильная непрерывность на плотном множестве может быть расширена до сильной непрерывности в H (согласно непрерывности всех операторов T_x). Следовательно, отображение T: $(x, u) \to T_x u$ из $N \times H$ в H определяет локальное унитарное представление группы G. Поскольку G односвязна, существует единственное расширение представления T до унитарного представления группы G в H.

Фактически эта лемма дает критерий для интегрируемости кососимметрического представления алгебры Ли. Однако этот критерий может не быть легко применимым в конкретных случаях. Следующая теорема дает простой критерий интегрируемости.

Теорема 2. *Пусть L — алгебра Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве H, которые имеют общую инвариантную плотную область определения D. Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — операторный базис для L, а $\Delta = X_1^2 + \ldots + X_d^2$. Если Δ существенно самосопряжен, то в H существует единственное унитарное представление T односвязной группы Ли G, имеющей L своей алгеброй Ли, такое, что для всех X из L $\overline{T(X)} = \overline{X}$.*

Доказательство. Пусть $\xi = |X_1| + \ldots + |X_d|$ и $\beta = |\Delta| + |I|$. По лемме 3.7 β аналитически доминирует над ξ,

а по последнему утверждению леммы 3.5 множество векторов, для которых $\|\exp(\xi s)\, u\| < \infty$ при некотором $s > 0$, плотно в H. Поэтому, согласно лемме 1, мы получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 2 вытекает следующее следствие, которое дает полезный критерий неинтегрируемости заданного кососимметрического представления алгебры Ли L.

Следствие 1. *Пусть L — такая же алгебра Ли, как и в теореме 2. Если хотя бы единственный элемент iX для X из L не существенно самосопряжен, то с L не может сопоставляться никакое унитарное представление $T(G)$ односвязной группы G. Следовательно, Δ не может быть существенно самосопряженным.*

Доказательство. Если Δ существенно самосопряжен, то по теореме 2 существует единственное унитарное представление $T(G)$ односвязной группы G и $\overline{T(X)} = \overline{X}$ для всех X из L. Согласно следствию 4 теоремы 2.3, $\overline{T(iX)}$ самосопряжен и, следовательно, каждый iX должен быть существенно самосопряженным. Поэтому если некоторый iX не существенно самосопряжен, то не существует глобального унитарного представления T группы G, такого, что $\overline{T(X)} = \overline{X}$. Следовательно, Δ не может быть существенно самосопряженным.

Пример 1. Пусть L — гейзенбергова алгебра Ли, определенная следующими коммутационными соотношениями:

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0. \tag{1}$$

Пусть $H = L^2(S)$, где S — открытый интервал $(0, 2\pi)$, и пусть

$$X = \frac{d}{d\varphi}, \quad Y = i\varphi, \quad Z = iI \tag{2}$$

— кососимметрическое представление алгебры L, определенное на $C_0^\infty(S)$, которое является общей инвариантной плотной областью определения. Для u из $C_0^\infty(S)$ и для любого v из $C^1(S)$ имеем

$$(Xu, v) = \int_0^{2\pi} Xu(\varphi)\, v(\varphi)\, d\varphi = (u, -Xv) + u(2\pi)\, v(2\pi) - u(0)\, v(0) =$$
$$= (u, -Xv) = (u, X^* v). \tag{3}$$

Поэтому $D(X^*) \supset D(X)$ и на $C^1(S)$ $X^* = -d/d\varphi$. Оператор X был бы существенно самосопряжен, если бы он имел индексы дефекта $(n_+, n_-) = (0, 0)$. Из формулы (11) приложения Б.1 следует, что индексы дефекта n_+ и n_- симметрического оператора iX равны числу решений уравнения

$$X^* v_\pm = \pm v_\pm. \tag{4}$$

Для оператора $X^* = -\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$ на $C^1(S)$ имеем $v_\pm = \exp(\mp\varphi)$. Поэтому индексы дефекта n_+ и n_- оператора X равны (1, 1). Таким образом, оператор X не существенно самосопряжен. Следовательно, в силу следствия 1 представление (2) алгебры Гейзенберга не интегрируется до глобального представления соответствующей нильпотентной группы.

Следующее полезное следствие дает основной результат теоремы 2, но с более слабым предположением на область определения представления. Грубо говоря, теорема 2 касается перехода от области D типа C^∞ до C^k, $k < \infty$, а приведенное ниже следствие — перехода от C^k до C^2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть L — вещественная алгебра Ли, а H — гильбертово пространство. Для каждого X из L пусть $\rho(X)$ — кососимметрический оператор на H. Пусть D — плотное линейное подпространство в H, такое, что для всех X, Y из L D содержится в области определения для $\rho(X)\rho(Y)$. Предположим, что для всех X, $Y \in L$, $u \in D$ и вещественных чисел a и b имеем*

$$\rho(aX + bY)u = a\rho(X)u + b\rho(Y)u, \tag{5}$$

$$\rho([X, Y])u = (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))u. \tag{6}$$

Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — базис для L. Если ограничение A оператора $\rho(X_1)^2 + \ldots + \rho(X_d)^2$ до D существенно самосопряжено, то на H существует единственное унитарное представление T односвязной группы Ли G, имеющей L алгеброй Ли, такое, что для всех X из L $\overline{T(X)} = \overline{\rho(X)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае, как и в лемме 3.5, для каждого n имеем

$$D(\overline{A^n}) \subset D(\overline{\rho(X_{i_1})} \ldots \rho(\overline{X_{i_n}})). \tag{7}$$

Доказательство этого соотношения совпадает с доказательством соотношения (3.43). Только вместо рассмотрения $\mathrm{ad}\,\rho(X)A$, который может иметь в своей области определения только 0, мы рассматриваем $\rho((\mathrm{ad}\,X)\Delta)$, где $\Delta = X_1^2 + \ldots + X_d^2$. Поскольку, согласно (3.21), $(\mathrm{ad}\,X)\Delta \in E^2$, то оператор $\rho((\mathrm{ad}\,X)\Delta)$ определен на D. Положим $\tilde{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\overline{A^n})$, $\tilde{A}$ — ограничение $\overline{A}$ на $\tilde{D}$, а $\tilde{X}_i$ — ограничение $\overline{\rho(X_i)}$ на $\tilde{D}$. Согласно (7), $\tilde{D}$ инвариантно относительно $\tilde{X}_i$. Более того, так как $A \subset \tilde{A} \subset \overline{A}$, мы находим, что $\overline{\tilde{A}}$ $(=\overline{A})$ самосопряжен, т. е. $\tilde{A}$ существенно самосопряжен. Итак, все предположения теоремы 2 выполняются и, следовательно, следствие справедливо.

Из теоремы 2 и следствия 2 получаем удобный критерий сильной коммутативности неограниченных операторов. Напомним, что

два неограниченных самосопряженных оператора называются *сильно коммутирующими*, если коммутируют их спектральные разложения.

Следствие 3. *Пусть A и B — симметрические операторы на гильбертовом пространстве H, и пусть D — плотное линейное подпространство в H, такое, что D содержится в области определения операторов A, B, A^2, AB, BA и B^2, и такое, что $ABu = BAu$ для всех u из D. Если ограничение $A^2 + B^2$ на D существенно самосопряжено, то*

1° *A и B существенно самосопряжены,*

2° *$\bar{A}$ и $\bar{B}$ сильно коммутируют.*

Доказательство. 1°. Пусть L — двумерная абелева алгебра Ли с базисом X, Y, и пусть $\rho(aX + bY) = \mathrm{i}aA + \mathrm{i}bB$. Тогда все предположения следствия 2 выполнены. Следовательно, на H существует единственное унитарное представление T односвязной абелевой группы (т. е. изоморфной R^2) G, такое, что $\overline{T(Z)} = \rho(Z)$ для всех Z из L. По следствию 4 теоремы 2.3 $\mathrm{i}\overline{T(Z)}$ самосопряжен. Следовательно, $A = -\mathrm{i}T(X)$ и $B = -\mathrm{i}T(Y)$ существенно самосопряжены.

2°. Поскольку G абелева, унитарные операторы $T_{\exp Z} = \exp[\overline{T(Z)}]$, $x = \exp Z \in G$, $Z \in L$, коммутируют. Поэтому самосопряженные операторы $\mathrm{i}\overline{T(X)} = \bar{A}$ и $\mathrm{i}\overline{T(Y)} = \bar{B}$ сильно коммутируют.

Из следствия 3 теоремы 2.3 мы знаем, что симметрические элементы L, M центра Z обертывающей алгебры E отображаются на существенно самосопряженные операторы $T(L)$ и $T(M)$. Однако если G — группа физической симметрии, то мы требуем, чтобы соответствующие самосопряженные операторы $\overline{T(L)}$ и $\overline{T(M)}$, так же как и T_x и $T(L)$, $x \in G$, $L = L^+ \in Z$, сильно коммутировали. Следующая теорема показывает, что это в действительности имеет место.

Теорема 3. *Пусть T — унитарное представление связной группы Ли G в гильбертовом пространстве H, и пусть Z — центр левоинвариантной обертывающей алгебры E для G. Тогда*

1° *Для любых симметрических L, M из Z самосопряженные оператора $\overline{T(L)}$ и $\overline{T(M)}$ сильно коммутируют.*

2° *Для любых симметрического N из Z и x из G операторы $\overline{T(N)}$ и T_x сильно коммутируют.*

Доказательство. 1°. Для любого

$$u(\varphi) = \int_G \varphi(x) T_x u \, \mathrm{d}x \in D_G$$

(D_G — область Гординга), согласно (1.17), имеем

$$T(L)T(M)u(\varphi) = u(\tilde{L}\tilde{M}\varphi) = u(\tilde{M}\tilde{L}\varphi) = T(M)T(L)u(\varphi).$$

Поэтому, взяв $D = D_G$, получаем, что все предположения следствия 3 выполняются. Следовательно, самосопряженные операторы $\overline{T(L)}$ и $\overline{T(M)}$ сильно коммутируют.

2°. Пусть $u(\tau) \in D_G$. Тогда, используя тот факт, что левые сдвиги $L_y\varphi(x) = \varphi(y^{-1}x)$ коммутируют с любым элементом $N \in Z$, и используя (1.17) и (1.13) для любого $u(\varphi) \in D_G$, получаем равенство

$$T_yT(N)u(\varphi) = T_yu(\tilde{N}\varphi) = u(L_y\tilde{N}\varphi) = u(\tilde{N}L_y\varphi) =$$

$$= T(N)u(L_y\varphi) = T(N)T_yu(\varphi).$$

Поэтому операторы $T(N)$ и T_x для любых N из Z и x из G коммутируют на области Гординга. Операторы $\overline{T(N)}$ и T_x также коммутируют на $D(\overline{T(N)})$. В самом деле, если $u \in D(\overline{T(N)})$, то из определения замыкания $\overline{T(N)}$ оператора $T(N)$ следует, что существует последовательность $D_G \ni u_n \to u$, такая, что $T(N)u_n \to v$ и $T(N)u_n \to \overline{T(N)}u = v$. Поскольку каждый оператор T_x, $x \in G$, непрерывен, для каждого $u \in D(\overline{T(N)})$ имеем

$$T_x\overline{T(N)}u = T_x\lim_{n\to\infty}T(N)u_n = \lim_{n\to\infty}T_xT(N)u_n = \lim_{n\to\infty}T(N)T_xu_n =$$

$$= \overline{T(N)}T_x\lim_{n\to\infty}u_n = \overline{T(N)}T_xu.$$

Утверждение пункта 2° следует теперь из того факта, что каждый ограниченный оператор, коммутирующий с самосопряженным оператором, сильно коммутирует с ним.

§ 6. ФС³-теория интегрируемости представлений алгебр Ли

В этом параграфе мы приводим красивую теорию интегрируемости представлений алгебр Ли, разработанную Флато, Саймоном, Снелманом и Стернгеймером (ФС³-теория). В противоположность теории Нельсона, изложенной в § 5, она дает критерий интегрируемости прямо в терминах свойств генераторов алгебр Ли. Следовательно, в общем она более эффективна для практических приложений, в особенности для алгебр Ли высших размерностей.

Начиная рассуждения, заметим, что в случае конечномерных вещественных алгебр Ли можно ввести несколько других определений аналитических векторов, которые эквивалентны (или слабее) определениям, использованным в § 3 и 4 (см. определение 3.1):