(D_G — область Гординга), согласно (1.17), имеем

$$T(L)T(M)u(\varphi) = u(\tilde{L}\tilde{M}\varphi) = u(\tilde{M}\tilde{L}\varphi) = T(M)T(L)u(\varphi).$$

Поэтому, взяв $D = D_G$, получаем, что все предположения следствия 3 выполняются. Следовательно, самосопряженные операторы $\overline{T(L)}$ и $\overline{T(M)}$ сильно коммутируют.

2°. Пусть $u(\tau) \in D_G$. Тогда, используя тот факт, что левые сдвиги $L_y\varphi(x) = \varphi(y^{-1}x)$ коммутируют с любым элементом $N \in Z$, и используя (1.17) и (1.13) для любого $u(\varphi) \in D_G$, получаем равенство

$$T_yT(N)u(\varphi) = T_yu(\tilde{N}\varphi) = u(L_y\tilde{N}\varphi) = u(\tilde{N}L_y\varphi) =$$

$$= T(N)u(L_y\varphi) = T(N)T_yu(\varphi).$$

Поэтому операторы $T(N)$ и T_x для любых N из Z и x из G коммутируют на области Гординга. Операторы $\overline{T(N)}$ и T_x также коммутируют на $D(\overline{T(N)})$. В самом деле, если $u \in D(\overline{T(N)})$, то из определения замыкания $\overline{T(N)}$ оператора $T(N)$ следует, что существует последовательность $D_G \ni u_n \to u$, такая, что $T(N)u_n \to v$ и $T(N)u_n \to \overline{T(N)}u = v$. Поскольку каждый оператор T_x, $x \in G$, непрерывен, для каждого $u \in D(\overline{T(N)})$ имеем

$$T_x\overline{T(N)}u = T_x\lim_{n\to\infty}T(N)u_n = \lim_{n\to\infty}T_xT(N)u_n = \lim_{n\to\infty}T(N)T_xu_n =$$

$$= \overline{T(N)}T_x\lim_{n\to\infty}u_n = \overline{T(N)}T_xu.$$

Утверждение пункта 2° следует теперь из того факта, что каждый ограниченный оператор, коммутирующий с самосопряженным оператором, сильно коммутирует с ним.

§ 6. ФС³-теория интегрируемости представлений алгебр Ли

В этом параграфе мы приводим красивую теорию интегрируемости представлений алгебр Ли, разработанную Флато, Саймоном, Снелманом и Стернгеймером (ФС³-теория). В противоположность теории Нельсона, изложенной в § 5, она дает критерий интегрируемости прямо в терминах свойств генераторов алгебр Ли. Следовательно, в общем она более эффективна для практических приложений, в особенности для алгебр Ли высших размерностей.

Начиная рассуждения, заметим, что в случае конечномерных вещественных алгебр Ли можно ввести несколько других определений аналитических векторов, которые эквивалентны (или слабее) определениям, использованным в § 3 и 4 (см. определение 3.1):

1. Вектор $u \in H$ аналитичен для каждого элемента из алгебры Ли (в смысле аналитичности для одного оператора, как определено в § 3).

2. Вектор $u \in H$ аналитичен для каждого элемента X_i, $i = 1, 2, \ldots, \dim L$, заданного линейного базиса алгебры Ли.

3. Вектор $u \in H$ аналитичен для каждого элемента X_k, являющегося генератором Ли алгебры Ли [1]).

Очевидно, что понятия аналитичности по 1—3 слабее понятия, введенного в § 4.

Докажем теперь основной результат, который говорит, что достаточно иметь общее инвариантное плотное множество аналитических векторов только для базиса алгебры Ли (в смысле определения 2), чтобы гарантировать интегрируемость первоначально заданного представления алгебры Ли. Мы начинаем с некоторых предварительных результатов.

Пусть $x \to T(x)$ — представление алгебры Ли L в комплексном гильбертовом пространстве H кососимметрическими операторами, определенными на общей плотной инвариантной области определения D. Очевидно, что такое представление сильно непрерывно в H. В дальнейшем мы будем писать $X = T(x)$, $Y = T(y)$ и т. д. и будем использовать обозначение

$$A(tX, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad} X)^n Y.$$

Лемма 1. *Для любых $x, y \in L$ и $u \in D$ ряд*

$$A(tX, Y)\, u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left((\operatorname{ad} X)^n Y\right) u \tag{1}$$

сходится для всех $t \in R$ и

$$T(e^x y e^{-x}) u = A(X, Y)\, u. \tag{2}$$

Доказательство. Соотношение (2) следует из (3.3.43) и из вышеупомянутой сильной коммутативности. Заменяя x на tx, мы получаем сходимость ряда $A(tX, Y)\, u$ для всех $t \in R$.

Легко проверить, что для любых $x, y \in L$ и $u \in D$ имеем

$$Y X^m u = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} X^p \left((-\operatorname{ad} X)^{m-p} Y\right) u. \tag{3}$$

---

[1]) Напомним, что множество $\{X_k\}_{k=1}^n$, $n \leqslant \dim L$, называется множеством генераторов Ли для L, если L натягивается на линейные комбинации повторяющихся коммутаторов от элементов $\{X_k\}_{k=1}^n$.

Утверждение 2. *Пусть T и T' — два представления вещественной алгебры Ли L кососимметрическими операторами на общих инвариантных областях определения D и D' (соответственно) плотных в H, с $D \subset D'$ и таких, что для любого $y \in L$ $Y = T(y)$ является ограничением на D оператора $Y' = T'(y)$. Тогда если D — область аналитических векторов для некоторого $X = T(x) \in T(L)$, то, обозначая через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в H, для любых $t \in R$, $u \in D$ и $v \in D'$ имеем*

$$\langle -e^{t\overline{X}} Yu, v\rangle = \langle e^{t\overline{X}} u, A(tX', Y')v\rangle. \tag{4}$$

Доказательство. В силу замечания 1 к лемме 3.1 замыкание $\overline{X}$ оператора X (и оператора X') кососопряжено и, следовательно, порождает единственную однопараметрическую группу, которую мы обозначим через $e^{t\overline{X}}$. Для всех $u \in D$ функции $t \to e^{t\overline{X}}u$ и $t \to e^{t\overline{X}}Yu$ аналитичны в R. По лемме 1 функция $t \to A(tX', Y')v$ с $v \in D'$ также аналитична в R. Следовательно, функции $a(t) = \langle -e^{t\overline{X}}Yu, v\rangle$ и $b(t) = \langle e^{t\overline{X}}u, A(tX', Y')v\rangle$ также аналитичны для всех вещественных t. Мы имеем

$$\frac{d^n a}{dt^n}(0) = \langle -X^n Yu, v\rangle, \tag{5}$$

$$\frac{d^n b}{dt^n}(0) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \langle X^p u, (\operatorname{ad} X')^{n-p} Y'v\rangle. \tag{6}$$

Так как $Y \subset Y' \subset Y'^*$ (и то же для X), то из (3) мы получаем, что $\frac{d^n a}{dt^n}(0) = \frac{d^n b}{dt^n}(0)$. Поэтому $a(t) = b(t)$ для всех $t \in R$.

Следствие 1. *При условиях утверждения 1 $e^{-t\overline{X}}v$ принадлежит области определения $D(Y^*)$ оператора Y^*, сопряженного Y, при всех $v \in D'$ и $t \in R$ и*

$$T'(e^{tx}ye^{-tx})v = -e^{t\overline{X}}Y^*e^{-tX}v. \tag{7}$$

В самом деле, в силу непрерывности по u правой стороны в (4) $e^{-t\overline{X}}v \in D(Y^*)$, откуда следует формула (7) (так как D плотно в H).

Предположение (А). *T является представлением алгебры Ли L на плотной инвариантной области определения D векторов, которые аналитичны для всех кососимметрических представителей $X_i = T(x_i)$ элементов базиса $x_1, \ldots, x_r$ алгебры L.*

Лемма 3. *Если предположение (А) удовлетворяется, определяем H_∞ как пересечение областей определения всех одночленов*

$\overline{X}_{i_1} \ldots \overline{X}_{i_n}$ для всех $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r$, $n \in N$. Пусть X'_i — ограничение $\overline{X}_i$ до H_∞. Для всех

$$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \in L$$

определяем

$$Y' \equiv T'(y) \equiv \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X'_i$$

(с инвариантной областью определения H_∞). Тогда T' — представление алгебры L кососимметрическими операторами (на H_∞) и для любых двух элементов x_i и x_j базиса и для $v \in H_\infty$ имеем

$$A(tX'_i, X'_j)\, v = e^{t\overline{X}_i} \overline{X}_j e^{-t\overline{X}_i} v. \tag{8}$$

Доказательство. По определению H_∞ содержит D и инвариантно относительно всех

$$\overline{X}_i = \overline{X}'_i = -X_i^* = -X_i'^*,$$

а потому и относительно всех Y', которые, согласно сделанному предположению, кососимметричны. По определению T' также линейно. Но если

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} x_k,$$

то для всех $v \in H_\infty$ и $u \in D$ имеем

$$\langle (X'_i X'_j - X'_j X'_i) v, u \rangle = \langle v, (X_j X_i - X_i X_j) u \rangle =$$
$$= \left\langle v, -\sum_k c_{ijk} X_k u \right\rangle = \left\langle \sum_k c_{ijk} X'_k v, u \right\rangle.$$

Следовательно, T' — представление, и мы можем применить формулу (7) с $D' = H_\infty$ к $y = x_j$, откуда следует (8).

Лемма 4. *Если выполняется предположение* (А), *то определенная выше область H_∞ инвариантна относительно $T'(L)$ и относительно всех однопараметрических групп $e^{t\overline{X}_i}$, и если $t_1, \ldots, t_r$ — дифференцируемые функции некоторого параметра t, то для всех $u \in H_\infty$ векторнозначная функция*

$$t \to e^{t_1 \overline{X}_1} \ldots e^{t_r \overline{X}_r} u$$

имеет первую производную по t.

Доказательство. Из (8) и из инвариантности H_∞ относительно $T'(L)$ для всех базисных элементов $x_i, x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ и всех $v \in H_\infty$ получаем

$$A(tX_i', X_{j_1}') \ldots A(tX_i', X_{j_n}')v = e^{t\overline{X}_i}\overline{X}_{j_1} \ldots \overline{X}_{j_n} e^{-t\overline{X}_i} v,$$

и $e^{-t\overline{X}_i}v$ принадлежит области определения всех операторов $\overline{X}_{j_1} \ldots \overline{X}_{j_n}$, откуда следует инвариантность H_∞ относительно $e^{-t\overline{X}_i}$.

Свойство дифференцируемости следует по индукции из дифференцируемости векторнозначной функции $t \to U(t)u(t)$, где $t \to u(t) \in H_\infty$ сильно дифференцируема, а $t \to U(t)$ — унитарная операторнозначная функция, сильно дифференцируемая на H_∞ (такая, что отображение $(t, u) \to U(t)u$ из $R \times H$ в H непрерывно).

Теперь мы даем основной результат.

Теорема 5. *Пусть T — представление алгебры Ли в комплексном гильбертовом пространстве, удовлетворяющее предположению* (A). *Тогда T интегрируется до единственного унитарного представления группы.*

Доказательство. Пусть x, y — элементы из L, достаточно близкие к 0, так что e^x, e^y, $e^x e^y$ и, следовательно, $e^{tx}e^y$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ лежат в окрестности W единицы группы G, введенной в 3.3. Ж. Запишем

$$e^{tx}e^y = e^{\alpha_1 x_1} \ldots e^{\alpha_r x_r},$$

$$e^{tx} = e^{t_1 x_1} \ldots e^{t_r x_r}, \tag{9}$$

$$e^y = e^{\beta_1 x_1} \ldots e^{\beta_r x_r}.$$

Для любого $z \in L$, такого, что $e^z \in W$, запишем (если базис выбран, то единственным образом) $e^z = e^{z_1 x_1} \ldots e^{z_r x_r}$ и определим

$$T(e^z) = e^{z_1 \overline{X}_1} \ldots e^{z_r \overline{X}_r}. \tag{10}$$

Так как G порождается конечными произведениями элементов из W, то нам следует только показать, что групповой закон имеет место в W, т. е. что для любых e^x, $e^y \in W$, таких, что $e^x e^y \in W$, имеем $T(e^x)T(e^y) = T(e^{xy})$ и что на D $T(L)$ является дифференциалом от $T(G)$. Однозначность очевидна, так как соотношение (10) является необходимым условием.

Из леммы 4 следует, что при $u \in H_\infty$ $T(e^{tx})u$ и $T(e^{tx}e^{y}) \times \times T(e^{y})^{-1}u$ — дифференцируемые функции от t. Так как

$$\frac{d}{dt_i} e^{t_i\overline{X}_i} u = \overline{X}_i e^{t_i\overline{X}_i} u = e^{t_i\overline{X}_i}\overline{X}_i u,$$

то прямым вычислением получаем

$$\frac{d}{dt} T(e^{tx})u = \Big(\frac{dt_1}{dt}\overline{X}_1 + \dots + \frac{dt_r}{dt} e^{t_1\overline{X}_1} \dots$$

$$\dots e^{t_{r-1}\overline{X}_{r-1}}\overline{X}_r e^{-t_{r-1}\overline{X}_{r-1}} \dots e^{-t_1\overline{X}_1}\Big) T(e^{tx})u$$

и подобным образом

$$\frac{d}{dt} T(e^{tx})u = T(e^{tx})\Big(\frac{dt_1}{dt} e^{-t_r\overline{X}_r} \dots e^{-t_2\overline{X}_2}\overline{X}_1 e^{t_2\overline{X}_2} \dots$$

$$\dots e^{t_r\overline{X}_r} + \dots + \frac{dt_r}{dt}\overline{X}_r\Big)u.$$

Из соотношений (3.3.41), (2), (8), (9) и (10) находим

$$\frac{d}{dt} T(e^{tx})u = X'T(e^{tx})u = T(e^{tx})X'u. \tag{11}$$

С другой стороны, для всех $u \in H_\infty$ прямым вычислением получаем

$$\frac{d}{dt} T(e^{tx}e^{y})T(e^{y})^{-1}u =$$

$$= \Big(\frac{d\alpha_1}{dt}\overline{X}_1 + \dots + \frac{d\alpha_r}{dt} e^{\alpha_1\overline{X}_1} \dots e^{\alpha_{r-1}\overline{X}_{r-1}}\overline{X}_r e^{-\alpha_{r-1}\overline{X}_{r-1}} \dots e^{-\alpha_1\overline{X}_1}\Big) \times$$

$$\times T(e^{tx}e^{y})T(e^{y})^{-1}u.$$

Поэтому из соотношений (3.3.42), (2), (8), (9) и (10) получаем, что для всех $u \in H_\infty$ $T(e^{tx}e^{y})\,T(e^{y})^{-1}u$ (которая принадлежит H_∞) является также дифференцируемым решением векторнозначного дифференциального уравнения (со значениями из H_∞ и дифференцированием в топологии пространства H)

$$\frac{d}{dt} u(t) = X'u(t), \quad u(t) \in H_\infty. \tag{12}$$

Такое уравнение имеет единственное решение (см. [449], стр. 481). В самом деле, легко проверить, что для любого решения $u(s) \in H_\infty$ и $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ $T(e^{(t-s)x})u(s)$ дифференцируема по s и что

$$\frac{d}{ds}\big(T(e^{(t-s)x})u(s)\big) = -T(e^{(t-s)x})X'u(s) + T(e^{(t-s)x})X'u(s) = 0.$$

Следовательно, $T(e^{(t-s)x})u(s)$ не зависит от s. Приравнивая ее значения при $s=0$ и $s=t$, получаем, что $u(t)=T(e^{tx})u(0)$, откуда следует единственность решения уравнения (12) в H_∞ и групповой закон (который мы можем расширить из H_∞ до H по непрерывности)

$$T(e^{tx}e^{y})=T(e^{tx})T(e^{y}).$$

Более того, соотношение (11) показывает, что $T(L)$ является ограничением до D дифференциала от $T(G)$.

Заметим, что, согласно результату Нельсона, аналитический вектор для Δ обязательно аналитичен для всей алгебры в целом, в то время как ситуация в теореме 5 иная: из того, что мы говорили до сих пор, мы знаем только, что существование плотного инвариантного множества аналитических векторов для базиса предполагает интегрируемость и, следовательно, по глобальной теореме существование (другого) плотного инвариантного множества аналитических векторов для всей алгебры (в смысле Нельсона) и поэтому для группы.

Теперь мы дадим более сильный вариант теоремы 5, который использует наиболее слабое понятие аналитичности, данное в определении 3.

Теорема 6. *Пусть выполняется предположение* (A). *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — *множество генераторов Ли алгебры Ли* L, *и пусть* A *обозначает множество аналитических векторов для каждого из* $T(x_1), \ldots, T(x_n)$ *в отдельности. Тогда*:

1. *Множество всех аналитических векторов для заданного произвольного элемента из* L *инвариантно относительно* $T(L)$.

2. *Существует единственное унитарное представление соответствующей связной односвязной группы Ли* (*имеющей* L *алгеброй Ли*) *на замыкании наименьшего множества* A', *содержащего* A *и инвариантного относительно* $T(L)$, *дифференциал которого на* A' *равен* T.

(Доказательство см. в [266].)

Следует отметить, что инвариантность множества аналитических векторов относительно $T(L)$ была получена автоматически.

Следующая теорема полностью выясняет связь между слабой аналитичностью, сильной аналитичностью Нельсона и аналитичностью для представления группы.

Теорема 7. *Пусть* G — *вещественная конечномерная группа Ли. Тогда существует базис* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *соответствующей алгебры Ли* L, *такой, что если задано любое представление группы* G *в гильбертовом пространстве, то любой вектор, аналитический в отдельности для замыканий представителей базиса* $\{x_1, \ldots, x_n\}$,

будет аналитичен для представления группы (что означает аналитичность для всей алгебры Ли, т. е. аналитичность в целом).
(Доказательство см. в [266].)

Теперь мы перейдем к другому вопросу: являются ли аналитические векторы в действительности необходимыми для гарантирования интегрируемости?

Первый пример, показывающий такую необходимость, был построен Нельсоном [628]. Следующая теорема хорошо иллюстрирует эту проблему.

Теорема 8. *Каждая компактная алгебра Ли размерности $n > 1$ имеет по крайней мере одно представление (в гильбертовом пространстве) на инвариантной области определения, такое, что каждый элемент алгебры представляется существенно кососопряженным оператором на этой области и каждый элемент некоторого линейного базиса алгебры интегрируем до однопараметрической компактной группы, но представление не является интегрируемым.*
(Доказательство см. в [268].)

ФС^3-теория очень удобна для приложений. В частности, Нидерле и Микельсон [639] и Нидерле и Котецкий, используя ФС^3-критерий интегрируемости, показали, что представления алгебр su (p, q) и so (p, q), полученные методом Гельфанда—Цетлина (§ 8), интегрируемы.

ФС^3-теория нашла также интересные приложения в квантовой теории поля Вайтмана. В частности, Снелман [771] доказал, что действие полиномиального кольца от полевых операторов на вакуум содержит плотное множество аналитических векторов для группы Пуанкаре. Этот анализ впоследствии был расширен Нагелом и Снелманом [615].

ФС^3-теория допускает обобщения на пространства, отличающиеся от гильбертовых.

Теория интегрируемости представлений алгебр Ли в квазиполных локально выпуклых пространствах была дана в работе Флато и др. ([269], § 5). Случай представлений в банаховых пространствах детально разработан в работе [462].

§ 7. «Уравнение теплопроводности» на группе Ли и аналитические векторы

В этом параграфе мы опишем интересный глобальный метод построения аналитических векторов для представления T группы Ли G. Он представляет собой обобщение метода Гординга построения регулярных векторов. Фактически мы заменяем функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в интеграле (1.12), т. е.

$$u(\varphi) = \int_G \varphi(x)\, T_x u \, dx, \tag{1}$$