§ 8. Алгебраическое построение неприводимых представлений

В предыдущих параграфах мы обсуждали общую теорию представлений алгебр Ли неограниченными операторами. Здесь мы представляем некоторое альтернативное явное построение неприводимых представлений некомпактных алгебр Ли, основанное на схемной технике. Эта техника работает для любых простых некомпактных классических алгебр Ли. Мы проиллюстрируем ее для случая алгебр $u(p, q)$, так как $u(1, 1)$, $u(2, 1)$, $u(2, 2)$, $u(6, 6)$ и т. д. появляются в физике частиц.

Рассмотрим алгебраическое описание неприводимых самосопряженных представлений алгебр Ли класса $u(p, q)$. Этот подход является прямым обобщением подхода Гельфанда — Цетлина для компактных алгебр Ли $u(n)$, рассмотренных в гл. 10, § 1. Дискретная серия неприводимых представлений алгебры $u(p, q)$, которая здесь строится, может рассматриваться как «ответвление» дискретной серии неприводимых представлений компактной алгебры Ли $u(p+q)$.

Напомним, что псевдоунитарная группа $U(p, q)$ определяется как группа линейных преобразований $(p+q)$-мерного комплексного пространства C^{p+q}, которые сохраняют эрмитову форму

$$\bar{z}^1 z^1 + \ldots + \bar{z}^p z^p - \bar{z}^{p+1} z^{p+1} - \ldots - \bar{z}^{p+q} z^{p+q}. \tag{1}$$

Поскольку $U(p, q)$ и $U(q, p)$ изоморфны, мы можем ограничиться случаем $U(p, q)$ с $p \geqslant q$.

Эрмитова форма (1) может быть записана в виде

$$z^* \sigma z, \tag{2}$$

где z представляет собой столбец, состоящий из z_k, $k = 1, 2, \ldots, p+q$, $z^* = (\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^{p+q}) = \bar{z}^T$, и матрица σ имеет вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad I_p = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Используя определение группы $U(p, q)$, получаем

$$z^* u^* \sigma u z = z^* \sigma z, \quad u \in U(p, q).$$

Следовательно, в силу произвольности z имеем

$$u^* \sigma u = \sigma \quad \text{для} \quad u \in U(p, q). \tag{4}$$

Теперь мы можем дать эквивалентное определение группы $U(p, q)$, а именно, $U(p, q)$ — группа всех линейных преобразований в C^{p+q}, удовлетворяющих условию (4). Положив в (4) $u(t) =$

$= \exp(itM)$, продифференцировав по t и приняв $t = 0$, получаем, что генераторы M удовлетворяют условию

$$M^* = \sigma M \sigma \tag{5}$$

с коммутационными соотношениями

$$[M, M'] = MM' - M'M. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь матрицу A_{ij}:

$$(A_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \ldots, p+q. \tag{7}$$

Эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $gl(p+q, R)$:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}. \tag{8}$$

Ясно, что каждая комплексная $n \times n$-матрица выражается в виде линейной комбинации матриц A_{ij}. В частности, каждый генератор $M \in u(p, q)$, удовлетворяющий условию (5), может быть выражен через A_{ij}. Действительно, $(p+q)^2$ независимых матриц

$$M_{kk} = A_{kk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$M_{kl} = A_{kl} + A_{lk}, \quad \tilde{M}_{kl} = i(A_{kl} - A_{lk}), \quad k < l \leqslant p \text{ или } p < k < l,$$

$$N_{kl} = A_{kl} - A_{lk}, \quad \tilde{N}_{kl} = i(A_{kl} + A_{lk}), \quad k \leqslant p < l, \tag{9}$$

удовлетворяют условию (5) и, следовательно, являются генераторами группы $U(p, q)$. Коммутационные соотношения для генераторов (9) группы $U(p, q)$ могут быть получены с помощью коммутационных соотношений для $gl(p+q, R)$, заданных в (8). Условие эрмитовости для генераторов M_{ik} и N_{ik}

$$M_{ik}^* = M_{ik}, \quad N_{ik}^* = N_{ik} \tag{10}$$

налагает следующие условия на генераторы A_{kl}:

$$A_{kl}^* = \varepsilon_{kl}A_{lk}, \quad \varepsilon_{kl} = \begin{cases} +1, & k, l \leqslant p \text{ или } p < k, l, \\ -1, & k \leqslant p < l \text{ или } l \leqslant p < k. \end{cases} \tag{11}$$

Следовательно, задача поиска неприводимых эрмитовых представлений алгебры $u(p, q)$ сводится к задаче поиска тех неприводимых представлений алгебры $gl(p+q, R)$, генераторы которых удовлетворяют условию (11). С практической точки зрения это значительное упрощение задачи, так как генераторы алгебры $gl(p+q, R)$, в противоположность генераторам алгебры $u(p, q)$, удовлетворяют простым и симметрическим коммутационным соотношениям вида (8) (см. также гл. 10, § 2, и гл. 9, § 4).

Построение эрмитовых неприводимых представлений алгебры $u(p, q)$ может быть выполнено следующими этапами:

1. Построение пространства представления.

2. Определение действия генераторов A_{ij}, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (8) и условию эрмитовости (11).

3. Доказательство неприводимости и неэквивалентности полученных представлений.

В случае компактной алгебры $u(n)$ пространство представления H_{m_n} определялось старшим весом $m_n = (m_{1n}, \ldots, m_{nn})$, который размещался в верхней строке схемы Гельфанда—Цетлина (см. гл. 10, § 1). Мы определяем пространство представления некомпактной алгебры Ли $u(p, q)$ также верхней строкой («старший вес») $m_n = (m_{1n}, \ldots, m_{nn})$, $n = p + q$, схем и так называемым *типом* представления. Тип представления определяется разложением числа p в сумму двух неотрицательных целых чисел α и β:

$$p = \alpha + \beta. \tag{12}$$

Если верхняя строка $m_n = (m_{1n}, \ldots, m_{nn})$ и тип (α, β) заданы, то обобщенные схемы Гельфанда—Цетлина определяем следующим множеством неравенств:

$$\begin{gathered}
m_{j,\,k+1} \geqslant m_{jk} \geqslant m_{j+1,\,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1, \\
m_{1k} \geqslant m_{1,\,k+1} + 1 \geqslant m_{2k} \geqslant m_{2,\,k+1} + 1 \geqslant \cdots \geqslant m_{\alpha k} \geqslant m_{\alpha,\,k+1} + 1, \\
k = p, \ldots, n-1, \\
m_{j,\,k+1} \geqslant m_{jk} \geqslant m_{j+1,\,k+1}, \quad j = \alpha + 1, \ldots, k - \beta, \quad k = p, \ldots, n-1, \\
m_{k-\beta+2,\,k+1} - 1 \geqslant m_{k-\beta+1,\,k} \geqslant m_{k-\beta+3,\,k+1} - \\
- 1 \geqslant \ldots \geqslant m_{k+1,\,k+1} - 1 \geqslant m_{kk}, \\
k = p, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{13}$$

В настоящем некомпактном случае числа m_{1k} пробегают интервал $[m_{1,\,k+1} + 1, \infty)$, а числа m_{kk} — интервал $(-\infty, m_{k+1,\,k+1} - 1]$. Следовательно, пространство представления H_{m_n} всегда бесконечномерно.

Структура схемы m определяется следующим образом. Размещаем все числа m_{jk} k-й строки между числами $m_{j,\,k+1}$ и $m_{j+1,\,k+1}$ $(k+1)$-й строки, как в случае схем для компактной алгебры $u(n)$. Потом сдвигаем каждый из первых α элементов $m_{1,\,n-1}, \ldots, m_{\alpha,\,n-1}$ $(n-1)$-й строки на одно место влево. Аналогично каждый из последних β элементов $(n-1)$-й строки сдвигаем на одно место вправо. Затем сдвигаем элементы $m_{i,\,n-2}$ $(n-2)$-й строки относительно $(n-1)$-й строки и т. д. вплоть до элементов m_{ip} p-й строки включительно. Положение элементов m_{ij} j-й строки, $j < p$, относительно соседней верхней строки остается неизменным. Такая структура схем отражает свойства неравенств (13), наложенных на числа m_{ij}. Предполагается, что единичные векторы, соответствующие различным схемам, ортонормированны и что на них натягивается пространство представления H_{m_n}.

Пример. *Алгебра Ли* $u(2, 1)$. В этом случае мы имеем три типа:

$$(\alpha, \beta) \sim (2, 0), \ (1, 1) \text{ и } (0, 2).$$

Соответствующие схемы имеют вид

$$\begin{vmatrix} & m_{13} & & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & & m_{22} & & \\ & m_{11} & & & \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & \\ m_{12} & & & & m_{22} \\ & & m_{11} & & \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & & m_{33} & \\ & & m_{12} & & m_{22} \\ & & & m_{11} & \end{vmatrix}.$$

Числа m_{ij} первой схемы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$m_{12} \geqslant m_{13} + 1, \quad m_{13} \geqslant m_{22} \geqslant m_{23}, \quad m_{12} \geqslant m_{11} \geqslant m_{22},$$

а числа второй схемы — неравенствам

$$m_{12} \geqslant m_{13} + 1, \quad m_{33} - 1 \geqslant m_{22}, \quad m_{12} \geqslant m_{11} \geqslant m_{22}.$$

Таким образом, бесконечномерное пространство представления H_{m_n} определяется множеством целых чисел $m_n = (m_{1n}, \ldots, m_{nn})$ («старшим весом»), которые удовлетворяют неравенствам

$$m_{1n} \geqslant m_{2n} \geqslant \cdots \geqslant m_{nn}, \quad n = p + q,$$

и типом (α, β).

Чтобы получить эрмитово представление алгебры $u(p, q)$ в H_{m_n}, определим действие A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, на базисные векторы из H_{m_n} так, чтобы выполнялись коммутационные соотношения (8) и условия эрмитовости (11). В гл. 10, § 1, показано, что любой генератор $A_{k-h,\,k}$, $h > 0$, может быть представлен в виде коммутатора генераторов A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$ с помощью соотношений

$$A_{k,\,k-h} = [A_{k,\,k-1}, \ A_{k-1,\,k-h}], \ A_{k-h,\,k} = [A_{k-h,\,k-1}, \ A_{k-1,\,k}], \ h > 1. \quad (14)$$

Следовательно, чтобы определить действие произвольного генератора A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, p + q$, в пространстве H_{m_n}, достаточно определить действие генераторов A_{kk}, $A_{k-1,\,k}$ и $A_{k,\,k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, p + q$. Действие этих генераторов на схему $m \in H_{m_n}$ может быть определено так же, как в случае алгебры $u(n)$. Обозначим через m_{k-1}^{j} $(\hat{m}_{k-1}^{j})$ схему, полученную из схемы m заменой $m_{j,\,k-1}$ на $m_{j,\,k-1} - 1$ $(m_{j,\,k-1} + 1)$.

Теорема 1. *Пусть H_{m_n} — линейное пространство, натянутое на векторы, соответствующие схемам, определенным формулами* (12) *и* (13). *Пусть действие операторов A_{kk}, $A_{k-1,\,k}$ и $A_{k,\,k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, p+q$, определяется формулами*

$$A_{kk}m = (r_k - r_{k-1})\,m, \tag{15}$$

$$A_{k,\,k-1}m = \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-1}^{j}(m)\,m_{k-1}^{j}, \tag{16}$$

$$A_{k-1,\,k}m = \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-1}^{j}(m)\,m_{k-1}^{\hat{j}}, \tag{17}$$

где

$$r_0 = 0, \quad r_k = \sum_{j=1}^{k} m_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

$$a_{k-1}^{j}(m) = \left[\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (l_{ik} - l_{j,\,k-1} + 1) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (l_{i,\,k-2} - l_{j,\,k-1})}{\prod\limits_{i \neq k} (l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} + 1)\,(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})} \right]^{1/2}, \tag{19}$$

$$b_{k-1}^{j}(m) = \left[\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (l_{ik} - l_{j,\,k-1}) \prod\limits_{i=1}^{k-2} (l_{i,\,k-2} - l_{j,\,k-1} - 1)}{\prod\limits_{i \neq j} (l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})\,(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} - 1)} \right]^{1/2}, \tag{20}$$

$$l_{ik} = m_{ik} \quad i, \tag{21}$$

$$\arg a_{k-1}^{j} = \arg b_{k-1}^{j} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \leqslant p+1, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad k = p+1. \end{cases} \tag{22}$$

Тогда действие произвольного оператора A_{kl} задается следующими формулами:

$$A_{kl}m = \sum_{i_{k-1}, \ldots, i_l} a_{i_{k-1} \ldots i_l}(m)\,m_{i_{k-1} \ldots i_l}, \quad k > l, \tag{23}$$

$$A_{kl}m = \sum_{i_k \ldots i_{l-1}} b_{i_k, \ldots, i_{l-1}}(m)\,m_{\hat{i}_k \ldots \hat{i}_{l-1}}, \quad k < l, \tag{24}$$

где [1])

$$a_{i_{k-1} \ldots i_l}(m) = \prod_{s=l+1}^{k} a_{i_{s-1}}(m) \prod_{s=l+2}^{k} \frac{\varepsilon_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}{c_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}, \quad k \geqslant l, \tag{25}$$

---

[1]) По определению произведение $\prod\limits_{s=l+2}^{k}$ равно 1, если $l = k-1$.

$$b_{i_k \ldots i_{l-1}}(m) = \prod_{s=k+1}^{l} b_{i_{s-1}}(m) \prod_{s=k+2}^{l} \frac{\varepsilon_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}{c_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}, \quad k < l, \tag{26}$$

$$a_{i_s}(m) = a_s^{i_s}(m), \quad b_{i_s}(m) = b_s^{i_s}(m), \tag{27}$$

$$c_{i_s i_t}(m) = [(l_{i_s s} - l_{i_t t} + 1)(l_{i_s s} - l_{i_t t})]^{1/2} \geqslant 0, \tag{28}$$

$$\varepsilon_{i_s i_t}(m) = \operatorname{sign}(l_{i_s s} - l_{i_t t}), \tag{29}$$

и i_s *пробегает множество значений* 1, 2, ..., s. *Схемы* $m_{i_{k-1} \ldots i_l}$ *и* $m_{\hat{i}_k \ldots \hat{i}_{l-1}}$ *определяются индуктивно*:

$$m_{i_{k-1} \ldots i_l} = (m_{i_{k-1} \ldots i_{l-1}})_l^{i_l}, \; k > l, \; m_{\hat{i}_k \ldots \hat{i}_{l-1}} =$$

$$= \left(m_{\hat{i}_k \ldots \hat{i}_{l-2}}\right)_{l-1}^{\hat{i}_{l-1}}, \quad k < l, \tag{30}$$

где

$$m_{i_s} = m_s^{i_s}, \quad m_{\hat{i}_s} = m_s^{\hat{i}_s}. \tag{31}$$

Операторы A_{kl} *удовлетворяют условиям эрмитовости* (11) *и коммутационным соотношениям* (8).

Каждое самосопряженное представление алгебры $u(p, q)$, $p + q = n$, *определенное старшим весом* $m_n = (m_{1n}, \ldots, m_{nn})$ *и типом* (α, β), *неприводимо. Два представления унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их старшие веса и типы совпадают.*

Доказательство этой теоремы включает только алгебраические вычисления, и поскольку они очень длинны, мы его опускаем. (Детали см. в [643].)

Множество самосопряженных представлений алгебры $u(p, q)$, заданных теоремой 1, называется *дискретной серией*. Из формул (15), (23) и (24) очевидно, что общая плотная линейная инвариантная область определения D в H_{m_n} для $u(p, q)$ состоит из всех конечных линейных комбинаций базисных элементов m, определенных типом (12) и неравенствами (13). Ясно, что пространство D является также инвариантной областью определения для обертывающей алгебры E алгебры Ли $u(p, q)$.

Разложение относительно подалгебр. Множества генераторов A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, p + q - 1$, определяет подалгебру $u(p, q - 1)$ в $u(p, q)$. Подалгебра $u(p, k)$ может быть выбрана подобным образом в алгебре $u(p, k + 1)$. Следовательно, мы, наконец, получаем цепочку уменьшающихся подалгебр:

$$u(p, q) \supset u(p, q-1) \supset \ldots \supset u(p, 0) \supset \ldots \supset u(2, 0) \supset u(1, 0). \tag{32}$$

Мы завершаем этот параграф следующими замечаниями:

а. Приведенное выше построение представлений разработано Гельфандом и Граевым в 1965 г. Они просто отгадали вид схем для $u(p, q)$ и формулы действия генераторов A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$ в $H_{m,\,n}^{(\alpha,\,\beta)}$ на основе компактного случая $u(n)$.

До сих пор не существует вывода ни структуры допустимых схем, ни формул действия операторов A_{kk}, $A_{k,\,k-1}$ и $A_{k-1,\,k}$.

б. *Представления алгебры* $u(p, 1)$. Случай алгебры $u(p, 1)$ рассмотрен более детально (Гельфандом и Граевым в 1965 г. и Оттосоном в 1968 г. [654]). Этот случай значительно проще, чем общий случай с $q > 1$, так как $u(p, 1)$ имеет компактную подалгебру $u(p)$ в роли максимальной подалгебры. Поэтому хорошо разработанная техника Гельфанда—Цетлина для $u(p)$ может быть использована для анализа неприводимых представлений алгебры $u(p, 1)$. Очень детальный вывод структуры схем для $u(p, 1)$ и действия генераторов A_{kk}, $A_{k-1,\,k}$ и $A_{k,\,k-1}$, а также классификации всех неприводимых унитарных представлений алгебры $u(p, 1)$ дан Оттосоном [654]. Интересно, что в случае $u(p, 1)$ получаем кроме дискретной серии представлений полудискретные серии, которые определены $p - 1$ дискретными параметрами и комплексным числом.

в. *Вырожденные представления алгебр* $u(p, q)$. Тодоровым [810] было замечено, что существует дискретная серия так называемых вырожденных представлений, которые не содержатся в множестве дискретных представлений, рассмотренных выше. Действительно, если мы наложим ограничения

$$m_{k,\,n} = m_{k+1,\,n} = \cdots = m_{k+r,\,n}, \quad r > q, \tag{33}$$

на r соседних компонент «веса» m_n, то получим

$$n - r \leqslant \alpha + \beta < p \tag{34}$$

и, следовательно, получим новую дискретную серию представлений алгебры $u(p, q)$. Более того, неравенства $m_{\alpha n} \geqslant m_{\alpha+1,\,n}$ и $m_{n-\beta,\,n} \geqslant m_{n-\beta+1,\,n}$ могут быть нарушены. Полученные $(a_{jk})^2$ и $(b_{jk})^2$, которые имели бы в общем неправильный знак для таких α и β, здесь или обращаются в нуль (в силу большого числа неравенств для m_{ik}), или могут быть переопределены таким образом, чтобы дать эрмитово представление алгебры $u(p, q)$. Существует два интересных случая. В первом мы имеем

$$m_{2n} = \cdots = m_{nn} = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0. \tag{35}$$

Базисные векторы для такого представления имеют вид

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & & & m_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & m_{1,n-1} & & 0 & 0 & & \dots & 0 \\
 & \iddots & & & & & & \iddots & \\
m_{1p} & & & & & 0 & \dots & 0 & \\
 & \iddots & & & & & \iddots & & \\
 & & m_{12} & & & & 0 & & \\
 & & & & & m_{11} & & &
\end{array}\right|. \qquad (36)$$

Эти вырожденные представления соответствуют так называемым «лестничным» представлениям, которые были использованы для описания свойств мультиплетов элементарных частиц. Другая дискретная серия так называемых *максимально вырожденных самосопряженных представлений* получается тогда, когда компоненты m_{in} удовлетворяют соотношениям

$$m_{1n} = -m_{nn}, \quad m_{2n} = \dots = m_{n-1,\,n} = 0, \quad \alpha = \beta = 1. \qquad (37)$$

Соответствующие схемы имеют вид

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & & & m_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \quad -m_{1n} \\
 & & m_{1,n-1} & & 0 & & & 0 & m_{1,n-1} \\
 & \iddots & & & & & & \iddots & \\
m_{1p} & & & & & 0 \dots 0 & & & m_{pp} \\
 & \iddots & & & & & & \iddots & \\
 & & m_{13} & & & 0 & & m_{33} & \\
 & & & m_{12} & & & m_{22} & & \\
 & & & & & m_{11} & & &
\end{array}\right|. \qquad (38)$$

Эти представления также были использованы для описания свойств мультиплетов элементарных частиц [810]. Полная классификация дискретных вырожденных серий и полудискретных серий для общей алгебры $u(p, q)$ еще не разработана.

Представления группы $U(p, q)$. Задача интегрируемости представлений дискретной серии была решена Микельсоном и Нидерле [591] и Котецким [493]. Используя условие интегрируемости Саймона для вещественных алгебр Ли, они доказали, что каждое представление дискретной серии алгебры $u(p, q)$, построенное методом Гельфанда—Граева, является дифференциалом унитарного однозначного представления группы $U(p, q)$.

Глобальная форма однопараметрических подгрупп группы $U(p, q)$ была вычислена в явном виде Гельфандом и Граевым. Используя представление группового элемента $g \in U(p, q)$ в терминах однопараметрических подгрупп, можно вычислить глобальную форму представления. Гельфанд и Граев выразили матричные элементы для глобальных представлений через обобщенные β-функции. Однако они не смогли получить окончательных формул в замкнутом виде. Эффективное решение этой задачи было бы очень полезным для многих приложений.

Представления алгебр so (p, q). Дискретная серия неприводимых эрмитовых представлений алгебры so (p, q) была построена Николовым [641]. Очень детальный анализ основной, дополнительной и исключительной серий представлений алгебры so $(n, 1)$ в рамках схем Гельфанда—Цетлина дан Оттосоном [653].

§ 9. Комментарии и дополнения

Теория представлений алгебр Ли, рассмотренная в § 1, основывается на работе Гординга [297]. Интересно, что теорема 1.1, дающая общую плотную инвариантную область определения для генераторов алгебры Ли, может быть легко распространена на полугруппы и даже на произвольные дифференцируемые многообразия.

Теория представлений обертывающих алгебр, приведенная в § 2, основывается на работе Нельсона и Стайнспринга [629]. Некоторые разрозненные результаты были известны раньше. В частности, следствие 4 теоремы 2.3 доказано раньше Сигалом [748].

Теория аналитических векторов была начата Хариш-Чандрой [367]. Он показал, в частности, что для определенных представлений полупростых групп Ли множество аналитических векторов (векторов хорошего поведения в его терминологии) плотно в H. Затем Картье и Диксмье [174] показали, что если T ограничено или скалярнозначно на определенной дискретной центральной подгруппе Z группы G, то множество аналитических векторов для T плотно.

Понятие аналитических векторов и их приложения в § 3, 4 и 5 основаны на фундаментальной работе Нельсона [628]. Более детальное доказательство теоремы Нельсона 8.5.2 и различные расширения понятия аналитических векторов даны Гудманом [336]. Наиболее важная теорема 5.2, которая дает удобный критерий интегрируемости представления алгебры Ли, находит много приложений в физике частиц и квантовой теории поля (гл. 21).

Пример 5.1 неинтегрируемых представлений имеет тот недостаток, что оператор $X = \mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$ не существенно самосопряжен. Нельсон [628] нашел пример, который удивил многих физиков: