

Глобальная форма однопараметрических подгрупп группы $U(p, q)$ была вычислена в явном виде Гельфандом и Граевым. Используя представление группового элемента $g \in U(p, q)$ в терминах однопараметрических подгрупп, можно вычислить глобальную форму представления. Гельфанд и Граев выразили матричные элементы для глобальных представлений через обобщенные β -функции. Однако они не смогли получить окончательных формул в замкнутом виде. Эффективное решение этой задачи было бы очень полезным для многих приложений.

Представления алгебр $so(p, q)$. Дискретная серия неприводимых эрмитовых представлений алгебры $so(p, q)$ была построена Николовым [641]. Очень детальный анализ основной, дополнительной и исключительной серий представлений алгебры $so(n, 1)$ в рамках схем Гельфанда—Цетлина дан Оттосоном [653].

§ 9. Комментарии и дополнения

Теория представлений алгебр Ли, рассмотренная в § 1, основывается на работе Гординга [297]. Интересно, что теорема 1.1, дающая общую плотную инвариантную область определения для генераторов алгебры Ли, может быть легко распространена на полугруппы и даже на произвольные дифференцируемые многообразия.

Теория представлений обертывающих алгебр, приведенная в § 2, основывается на работе Нельсона и Стайнспринга [629]. Некоторые разрозненные результаты были известны раньше. В частности, следствие 4 теоремы 2.3 доказано раньше Сигалом [748].

Теория аналитических векторов была начата Хариш-Чандрой [367]. Он показал, в частности, что для определенных представлений полупростых групп Ли множество аналитических векторов (векторов хорошего поведения в его терминологии) плотно в H . Затем Картье и Диксмье [174] показали, что если T ограничено или скалярнозначно на определенной дискретной центральной подгруппе Z группы G , то множество аналитических векторов для T плотно.

Понятие аналитических векторов и их приложения в § 3, 4 и 5 основаны на фундаментальной работе Нельсона [628]. Более детальное доказательство теоремы Нельсона 8.5.2 и различные расширения понятия аналитических векторов даны Гудманом [336]. Наиболее важная теорема 5.2, которая дает удобный критерий интегрируемости представления алгебры Ли, находит много приложений в физике частиц и квантовой теории поля (гл. 21).

Пример 5.1 неинтегрируемых представлений имеет тот недостаток, что оператор $X = d/d\varphi$ не существенно самосопряжен. Нельсон [628] нашел пример, который удивил многих физиков:

именно, он построил два существенно самосопряженных оператора A и B , коммутирующих на общей плотной инвариантной области, и показал, что глобальные преобразования $\exp(itA)$ и $\exp(itB)$ не коммутируют. Это показывает, что абелева алгебра Ли может не быть интегрируемой до глобальной абелевой группы, если оператор Нельсона $\Delta = X_1^2 + \dots + X_n^2$ не существенно самосопряжен.

Теорема 5.3 была доказана К. Мореном и Л. Морен [575].

Теория интегрируемости представлений алгебр Ли, использующая понятие слабой аналитичности, разработана Флато, Саймоном, Снелманом и Стернгеймером [269]. Упрощенный вариант этой теории, использующий только условия на генераторы Ли алгебры Ли, разработан Саймоном [765] и Флато и Саймоном [266].

Идея использования решения уравнения теплопроводности на группе Ли G для построения аналитических векторов для представления T группы G впервые была предложена Нельсоном ([628], § 8). В § 6 мы следовали упрощенному варианту этой теории, разработанному Гордингом [298].

Можно спросить, нельзя ли развить теорию представлений алгебр Ли, имеющую дело только с кососимметрическими ограниченными операторами. Тогда можно было бы освободиться почти от всех трудностей, которые встречались в этой главе. Эта интересная задача рассматривалась Дебнером и Мелшаймером. Они доказали такую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Нетривиальное представление некомпактной алгебры Ли кососимметрическими операторами содержит по крайней мере один неограниченный оператор.*

§ 10. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что каждое кососимметрическое представление $X \rightarrow T(X)$ алгебры Ли L в комплексном гильбертовом пространстве, имеющее общую плотную инвариантную область определения D , сильно непрерывно на D .

Указание. Наделите евклидовой топологией и используйте линейность представления.

§ 1.2. Пусть $G = SO(3)$ и $H = L^2(S^2, \mu)$. Покажите, что самосопряженные генераторы левого квазирегулярного представления $T_x u(s) = u(x^{-1}s)$ имеют вид

$$\begin{aligned} L_x &= i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_y &= i \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$