

Краткое содержание книги

Книга открывается обширной главой, посвященной алгебрам Ли. В ней дается подробное замкнутое изложение теории и приложений алгебр Ли. Теория алгебр Ли является самостоятельным разделом математики, и первую главу можно читать независимо от остальных глав. После введения основных понятий излагается структура и теория произвольных алгебр Ли, описываются нильпотентные и разрешимые алгебры и дается полная классификация как комплексных, так и вещественных простых алгебр Ли. Кроме того, подробно рассматриваются теоремы о разложении алгебр Ли, т. е. разложения Гаусса, Картана и Ивасавы.

Глава 2 начинается с обзора свойств топологических пространств, необходимых для введения понятий топологических групп. Рассматриваются такие общие свойства топологических групп, как компактность, связность, метрические свойства. Далее обсуждается интегрирование по групповому многообразию, т. е. инвариантная мера (мера Хаара) на группе. Здесь же дается фундаментальная теорема Макки о разложении топологических групп.

Глава 3 открывается обзором дифференцируемых многообразий, их аналитических структур и касательных пространств. После этих предварительных сведений по топологическим группам и дифференцируемым многообразиям вводятся группы Ли как топологические группы с аналитической структурой и выводятся основные соотношения между группами и алгебрами Ли. Остальные параграфы гл. 3 посвящены свойствам композиции и разложения групп (т. е. разложениям Леви—Мальцева, Гаусса, Картана, Ивасавы), классификации групп Ли, некоторым результатам по структуре групп Ли и построению инвариантной меры и инвариантной метрики.

В гл. 4 вводятся понятия однородных и симметрических пространств, на которых действуют группы. Эти понятия играют важную роль в современной теории представлений групп и в физических приложениях. Затем дается классификация глобально симметрических римановых пространств, связанных с классическими простыми группами Ли. В этой главе рассматривается также понятие квазинвариантной меры, поскольку инвариантные меры на однородных пространствах в общем случае не существуют.

Теория представлений групп — основная тема книги — начинается с гл. 5, где вначале даются определения, излагаются основные свойства представлений, вводятся такие понятия, как неприводимость, эквивалентность, тензорное и прямое произведения представлений. Затем следуют теоремы Маутнера и Гельфанда—Райкова о разложении и полноте представлений групп.

После этого шаг за шагом развивается теория представлений групп, начиная с простейшего случая коммутативных групп (гл. 6). Далее следует изложение теории представлений компактных групп (гл. 7). Для полноты изложения в качестве специального случая дан также обзор по представлениям конечных групп. Теория представлений компактных групп является завершенной, и здесь приведены общие теоремы этой теории (аппроксимационные теоремы Петера—Вейля и Вейля). Имея в виду возможные применения, мы обсуждаем также проекционные операторы, разложение представлений и тензорных произведений представлений.

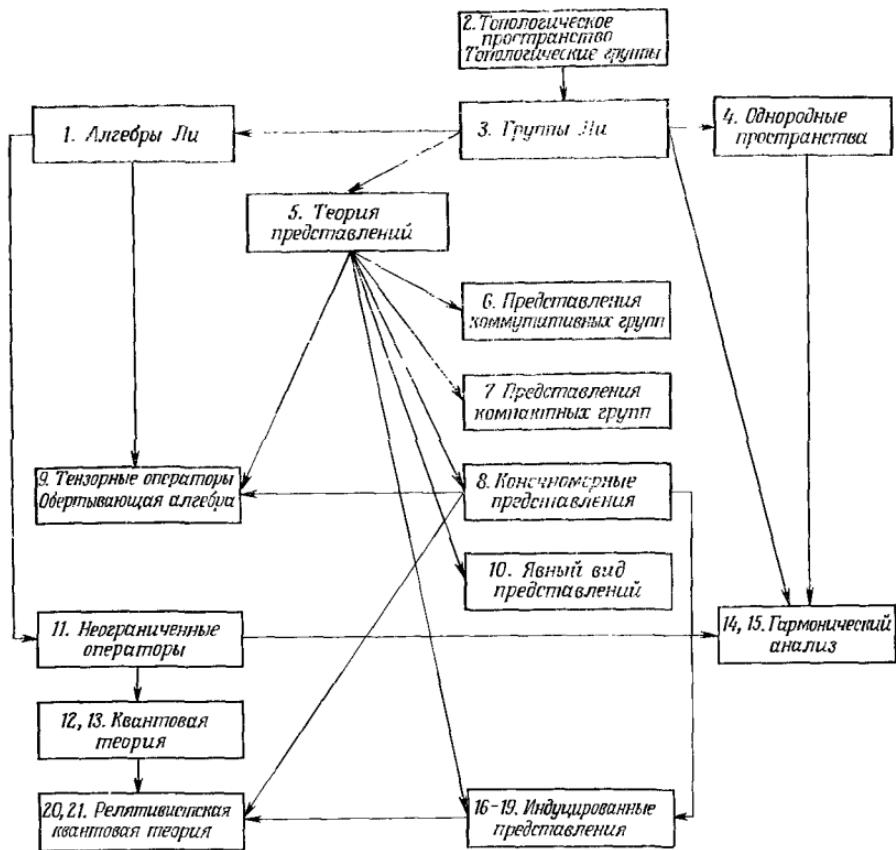
Затем (в гл. 8) следует описание всех конечномерных неприводимых представлений произвольных групп Ли (компактных или некомпактных). Здесь дается, насколько нам известно, наиболее полное по сравнению с любой другой книгой изложение свойств представлений полупростых групп. После изложения в гл. 9 необходимых сведений по тензорным операторам, обертывающим алгебрам, инвариантным операторам или операторам Казимира и их спектрам (эти понятия используются для точного определения и обозначения представлений) в гл. 10 описываются методы точного построения конечномерных представлений. В частности, приводятся метод Гельфанда—Цетлина, тензорный метод, метод гармонических функций и метод операторов рождения и уничтожения.

В гл. 11 излагается теория представлений алгебр Ли и обертывающих алгебр неограниченными операторами и связанные с ней вопросы интегрируемости представлений алгебр Ли до представлений соответствующих групп Ли. Эта глава является одной из наиболее существенных в книге. Теория неограниченных операторов важна и для приложений, поскольку большинство наблюдаемых в квантовой теории представляются неограниченными операторами. В частности, представлена теория аналитических векторов для групп и алгебр Ли.

В гл. 12 и 13 описывается роль теории представлений групп в различных областях квантовой теории и даются конкретные ее применения. Математическая структура представлений групп в гильбертовом пространстве особенно приспособлена к квантовой теории. Действительно, вся схема квантовой теории может основываться на одной только концепции представлений групп. К тому же в историческом плане понятия гильбертова пространства и представлений групп в гильбертовом пространстве восходят к квантовой теории. Обсуждаются также понятия кинематической

и динамической симметрий, классификация основных видов симметрий в физике и использование представлений групп для решения динамических проблем в квантовой механике.

Следующие две главы (гл. 14 и 15) посвящены гармоническому анализу на группах Ли, а также на однородных и симметрических



пространствах. Эта теория включает в себя обобщение разложения Фурье на некоммутативные группы, соответствующий спектральный синтез и формулы Планшереля. Наряду с общей теорией обсуждаются конкретные применения к некоторым простым группам и полуупрямым произведениям групп.

Главы 16—19 посвящены теории индуцированных представлений — одной из наиболее существенных тем книги. Индуцированные представления используются уже в гл. 8 при получении классификации, а также явного вида всех конечномерных неприводимых представлений групп Ли. Здесь же излагается общая теория.

В гл. 16 мы имеем дело с основными свойствами индуцированных представлений и фундаментальной теоремой об импрimitив-

ности. В гл. 17 дано описание индуцированных представлений полупрямых произведений группы с выводом полной классификации всех представлений группы Пуанкаре. Другие свойства индуцированных представлений (индукционно-редукционная теорема, теорема о тензорном произведении и теорема взаимности Фробениуса) обсуждаются в гл. 18. В гл. 19 эта теория применяется с целью явного получения индуцированных неприводимых унитарных (следовательно, бесконечномерных) представлений основных и дополнительных серий комплексных классических групп Ли.

Наконец, в гл. 20, 21 рассматривается применение теоремы об импрimitивности и индуцированных представлений группы Пуанкаре в квантовой физике — прежде всего к концепции релятивистского оператора положения и доказательству эквивалентности описаний Гейзенберга и Шредингера нерелятивистской квантовой механики (гл. 20), а затем (в гл. 21) — к классификации всех конечномерных релятивистских волновых уравнений, к использованию представлений с мнимой массой, к уравнениям типа Гельфанд—Яглома и бесконечнокомпонентным релятивистским волновым уравнениям, а также к проблеме группового расширения представлений группы релятивистских преобразований дискретными преобразованиями и посредством других групп симметрии.

Ряд математических понятий, которые существенны для понимания книги, но не всегда в достаточной степени известны физикам, приведен в приложениях по функциональному анализу и по некоторым другим результатам из алгебры, топологии, теории интегрирования и т. п.

В конце каждой главы содержатся замечания относительно дальнейшего развития затронутых вопросов, а также упражнения.