ние дискретных уровней равно $(2J+1)^2 = n^2$, $J = 0, {}^1/_2, 1, \ldots$ (такое же, как и в примере 2). Состояния можно характеризовать посредством $|n, J, M\rangle$, где n эквивалентно энергетическому параметру или оставшемуся оператору Казимира группы SO(4). Следовательно, представления алгебры динамической симметрии имеют кратность один.

Для $E > 0$ ввиду появления множителя i в равенстве (6) мы видим, что действительной алгеброй Ли динамической симметрии является теперь so(3, 1) и по-прежнему справедливо (7). Физически эти состояния соответствуют состояниям рассеяния частицы на потенциале Кеплера. Унитарные представления SO(3, 1) бесконечномерны; это означает, что в эксперименте по рассеянию при фиксированной энергии имеется бесконечно много парциальных волн момента импульса, каждая с кратностью один, равной кратности неприводимого представления T^L группы SO(3) в представлении группы SO(3, 1).

Замечание. Понятие симметрии можно применять помимо энергии к любой другой наблюдаемой, например к моменту импульса, спину и т. п. Если A — наблюдаемая и мы рассматриваем задачу на собственные значения

$$Af = af,$$

то операторы, коммутирующие с A, порождают алгебру Ли, представления которой определяют вырождение состояний с одним и тем же значением a.

§ 2. Динамические алгебры Ли

В § 1 мы рассмотрели группу вырождения гамильтонианов. Представления группы максимальной симметрии дают размерность собственного пространства оператора H для заданной энергии E. Чтобы полностью решить квантовомеханическую задачу (1.2), мы должны еще определить спектр оператора H. Решим эту задачу в рамках следующего общего формализма.

Пусть W — дифференциальный оператор; рассмотрим (волновое) уравнение

$$W\psi = 0. \qquad (*)$$

Если существуют операторы L_i, $i = 1, \ldots, r$, образующие алгебру Ли L и удовлетворяющие на пространстве решений $(*)$ соотношению

$$[W, L_i]\,\psi = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

то на все решения волнового уравнения $(*)$ натягивается пространство представления алгебры Ли L. Ясно, что если ψ — решение $(*)$, то $L_i\psi$ также является решением, и мы имеем $[W, L_i] = f(W)$, где f — произвольный полином с коэффициентами,

зависящими от координат, удовлетворяющий уравнению $f(0) = 0$. В частности, если $W = i\partial_t - H$, или $W = (\partial_\mu - A_\mu)^2$, то алгебра Ли L называется *динамической алгеброй Ли* квантовой системы. В общем случае она содержит зависящие от времени операторы $L(t)$, которые на пространстве решений ψ уравнения $W\psi = 0$ удовлетворяют уравнению Гейзенберга:

$$[i\partial_t, L_k(t)] = [H, L_k(t)].$$

Подалгебра $L' \subset L$, состоящая из коммутирующих с W операторов, представляет собой более узкое определение симметрии; как L', так и L действуют в одном и том же гильбертовом пространстве. Наконец, подалгебра $L'' \subset L'$ независящих от времени операторов удовлетворяет $[H, L] = 0$ и является *алгеброй симметрии для* H, обсуждавшейся в § 1.

Уравнение Гейзенберга имеет решение $L_k(t)$, задаваемое в виде

$$L_k(t) = \exp[itH]\, L_k(0) \exp[-itH].$$

Так как оператор энергии H коммутирует с эволюционным оператором $\exp[itH]$, зависящая от времени динамическая алгебра Ли $\{H, L_k(t)\}$ и независящая от времени динамическая алгебра Ли $\{H, L_k(0)\}$ унитарно эквивалентны. В конкретных задачах это позволяет нам ограничиться анализом независящих от времени динамических алгебр Ли.

Решим теперь явно некоторые важные квантоводинамические задачи при помощи метода представлений алгебр Ли. Начнем с изложения в виде лемм некоторых дополнительных результатов. Доказательство этих лемм не составляет труда и предоставляется читателю в качестве упражнений.

Лемма 1. *Следующие три оператора* ($[p, q] = -i$):

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2),$$
$$T = \frac{1}{4}(pq + qp), \tag{1}$$
$$\Gamma_4 = \Gamma_0 - \frac{1}{2}q^2$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $o(2, 1)$ ($su(1, 1)$)

$$[\Gamma_0, \Gamma_4] = iT, \quad [\Gamma_4, T] = -i\Gamma_0, \quad [T, \Gamma_0] = i\Gamma_4. \tag{2}$$

Для оператора Казимира

$$C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 \tag{3}$$

вычисление дает

$$C_2 = -\frac{3}{16} = \varphi(\varphi + 1), \quad \varphi = -\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, соотношения (1) являются реализацией представления D^+ алгебры su(1, 1) (упражнение 11.10.7.6.1). Равенства (1) и (3) немедленно дают решение динамического уравнения для линейного осциллятора со стационарным уравнением

$$Hu = \frac{\hbar\omega}{2}\left(p^2 + \frac{\omega m}{\hbar}x^2\right)u = Eu, \tag{4}$$

так как после подстановки $q = (m\omega/\hbar)^{1/2}x$ и $2\Gamma_0 = \frac{1}{\hbar\omega}H$ уравнение (4) может быть записано в виде

$$(2\Gamma_0 - E/\hbar\omega)\,u = 0.$$

Таким образом, собственные состояния $|n\rangle$ оператора Γ_0 ввиду 11.10.7.6.1 имеют дискретные собственные значения $n + {}^1/_2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и образуют пространство решений

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

В качестве второго типичного примера используем лемму.

Лемма 2. *Операторы*

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{2}(rp^2 + r), \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{2}(rp^2 - r), \\ T &= \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} - \mathrm{i}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $r = \sqrt{\boldsymbol{r}^2}$, $p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}$, *также удовлетворяют коммутационным соотношениям* (2) *алгебры Ли* $o(2, 1)$. *Оператор Казимира* (3) *имеет значение*

$$C_2 = \boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})^2 = j(j+1), \quad \textit{т. е.} \quad \varphi = -j - 1 \quad \textit{или} \quad \varphi = j.$$

Рассмотрим теперь стационарное уравнение

$$Hu = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\right)u = Eu \tag{6}$$

для стационарных решений движения частицы в кулоновском поле. Вводим связанное с последним уравнение

$$\Theta\psi = [r(H - E)]\,\psi = 0. \tag{7}$$

Оператор (6) можно выразить в виде линейной комбинации генераторов (4):

$$\Theta = \left(\frac{1}{2m} - E\right)\Gamma_0 + \left(\frac{1}{2m} + E\right)\Gamma_4 - \alpha. \tag{8}$$

Чтобы решить уравнение (7), сначала диагонализируем Γ_0. Определяя

$$\tilde{\psi} \equiv \exp(-\mathrm{i}\theta T)\,\psi, \tag{9}$$

где T задано в (5), и используя коммутационные соотношения (2), имеем

$$\left[\left(-E+\frac{1}{2m}\right)(\Gamma_0 \operatorname{ch}\theta+\Gamma_4 \operatorname{sh}\theta)+\right.$$

$$\left.+\left(E+\frac{1}{2m}\right)(\Gamma_4 \operatorname{ch}\theta+\Gamma_0 \operatorname{sh}\theta)-\alpha\right]\tilde{\psi}=0. \tag{10}$$

Следовательно, если выбрать

$$\operatorname{th}\theta=\left(E+\frac{1}{2m}\right)\Big/\left(E-\frac{1}{2m}\right), \tag{11}$$

то из (10) немедленно получаем простое уравнение

$$[(-2E/m)^{1/2}\,\Gamma_0-\alpha]\,\tilde{\psi}=0. \tag{12}$$

Спектром оператора Γ_0 в дискретном представлении o (2, 1), определяемом посредством 11.10.7.6.1, являются значения $n=s+j+1$, $s=0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, уравнение (12) дает

$$E_n=-\frac{\alpha^2 m}{2n^2}, \tag{13}$$

т. е. хорошо известный спектр атома водорода. Решения $\tilde{\psi}$ нормируются теперь следующим образом:

$$\int \bar{\tilde{\psi}}\tilde{\psi}r^{-1}\,\mathrm{d}^3x=1. \tag{14}$$

Чтобы найти непрерывный спектр нашей задачи, выберем параметр θ в уравнении (10) по-другому, а именно

$$\operatorname{th}\theta=\left(E-\frac{1}{2m}\right)\Big/\left(E+\frac{1}{2m}\right), \tag{15}$$

и получим вместо (12)

$$[(2E/m)^{1/2}\Gamma_4-\alpha]\,\psi=0. \tag{16}$$

Обозначив обобщенные (ненормируемые) собственные векторы оператора Γ_4 через

$$\Gamma_4\,|\,Q,\lambda\rangle=\lambda\,|\,Q,\lambda\rangle, \tag{17}$$

получаем

$$E_\lambda=\frac{\alpha^2 m}{2\lambda^2}, \qquad \lambda\in R. \tag{18}$$

Динамическая алгебра (5) не решает полностью вырождения уровней гамильтониана (6), поскольку мы еще не изучили моменты импульсов уровней. Следующая лемма решает эту задачу.

Лемма 3. *Операторы* (5) *вместе с*

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{M} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}, \\ \Gamma &= \boldsymbol{r}\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{20}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли so(4, 2). *Инвариантные операторы второго, третьего и четвертого порядков имеют значения*

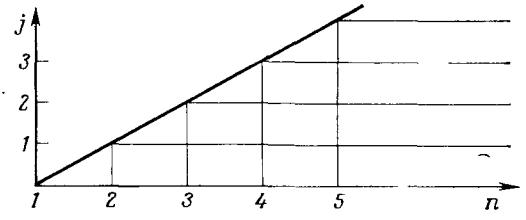
$$C_2 = -3, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -12, \tag{21}$$

где $C_2 = \frac{1}{2} L_{ab}L^{ab}$, $C_3 = \varepsilon_{abcdef}L^{ab}L^{cd}L^{ef}$, $C_4 = L_{ab}L^{bc}L_{cd}L^{da}$, $a, b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Примечание. $L_{ij} = \varepsilon_{ijk}J_k$, $L_{i4} = A_i$, $L_{i0} = M_i$, $L_{i5} = \Gamma_i$, $L_{05} = \Gamma_0$, $L_{45} = \Gamma_4$, $L_{04} = T$.

Следующая лемма дает вырождение состояний гамильтониана (6).

Лемма 4. *Представление* so(4, 2), *заданное при помощи* (5), (19), (20) *и* (21) *в базисе, в котором* Γ_0, $\boldsymbol{J}^2$ и J_3 *диагонализованы с собственными значениями* n, $j(j+1)$ *и* m *соответственно, имеет весовую диаграмму, т. е. состояния* $|n, j, m\rangle$, *задаваемые фиг. 1.*



Фиг 1.

Доказательство. Элементы Γ_0, Γ_4, T образуют алгебру su(1, 1). Оператор Казимира $C_2(o(2, 1)) = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \boldsymbol{J}^2$. Пусть собственные значения оператора Γ_0 обозначаются через n. Поскольку $\boldsymbol{J}^2$ имеет собственные значения $j(j+1)$ при фиксированном j, n изменяется в пределах $j + 1 \leqslant n < \infty$. Это дает горизонтальные линии на фиг. 1.

Для более общих задач мы можем пользоваться следующим обобщением леммы 3.

Лемма 5. *Операторы*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\pi} - \mu \hat{\boldsymbol{r}},\\
&\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{\Gamma} = r\boldsymbol{\pi},\\
&\Gamma_0 = \frac{1}{2}(r\pi^2 + r + \mu^2/r),\\
&\Gamma_4 = \frac{1}{2}(r\pi^2 - r + \mu^2/r),\\
&T = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi} - \mathrm{i},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где

$$
\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r[r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2]}
$$

($\boldsymbol{n}$ — *произвольный постоянный единичный вектор*), *также удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры* so(4, 2), *для которой вместо* (21) *мы теперь имеем*

$$
C_2 = -3(1-\mu^2), \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{23}
$$

Для каждого значения $\mu = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$ *равенства* (22) *задают неприводимое представление* so(4, 2) *в дискретной серии. Представления* (22) *можно характеризовать при помощи так называемого соотношения представления*

$$
\{L_{AB}, L_C^A\} = -2ag_{BC}, \tag{24}
$$

где L_{AB} — *генераторы* so(4, 2) *и* $a = 1 - \mu^2$.

Более общая теория симметрий в квантовой механике излагается в гл. 13 и 21.

§ 3. Упражнения

§ 2.1. Рассмотрите момент импульса заданной в (22) системы заряд — монополь, т. е.

$$
\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\pi} - \mu\hat{\boldsymbol{r}},
$$

$$
\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r(r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2)}.
$$

Покажите, что

а) при фиксированном $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{D}$ сингулярен; $\boldsymbol{J}$ может быть представлен на пространстве функций, быстро стремящихся к нулю вдоль линии особенностей $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}$; он имеет индекс дефекта (1, 1)