Лемма 5. *Операторы*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\pi} - \mu \hat{\boldsymbol{r}},\\
&\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\pi^2 - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \frac{\mu}{r}\boldsymbol{J} + \frac{\mu^2}{2r^2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r},\\
&\boldsymbol{\Gamma} = r\boldsymbol{\pi},\\
&\Gamma_0 = \frac{1}{2}(r\pi^2 + r + \mu^2/r),\\
&\Gamma_4 = \frac{1}{2}(r\pi^2 - r + \mu^2/r),\\
&T = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\pi} - \mathrm{i},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где

$$
\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r[r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2]}
$$

($\boldsymbol{n}$ — *произвольный постоянный единичный вектор*), *также удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры* so(4, 2), *для которой вместо* (21) *мы теперь имеем*

$$
C_2 = -3(1-\mu^2), \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{23}
$$

Для каждого значения $\mu = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$ *равенства* (22) *задают неприводимое представление* so(4, 2) *в дискретной серии. Представления* (22) *можно характеризовать при помощи так называемого соотношения представления*

$$
\{L_{AB}, L_C^A\} = -2ag_{BC}, \tag{24}
$$

где L_{AB} — *генераторы* so(4, 2) *и* $a = 1 - \mu^2$.

Более общая теория симметрий в квантовой механике излагается в гл. 13 и 21.

§ 3. Упражнения

§ 2.1. Рассмотрите момент импульса заданной в (22) системы заряд — монополь, т. е.

$$
\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\pi} - \mu\hat{\boldsymbol{r}},
$$

$$
\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r(r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2)}.
$$

Покажите, что

а) при фиксированном $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{D}$ сингулярен; $\boldsymbol{J}$ может быть представлен на пространстве функций, быстро стремящихся к нулю вдоль линии особенностей $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}$; он имеет индекс дефекта (1, 1)

и, следовательно, может быть расширен до самосопряженного оператора. Условия интегрируемости на представления приводят к так называемому условию квантования заряда: $\mu = 0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \ldots$;

б) если $\boldsymbol{n}$ вращается вместе с $\boldsymbol{r}$, то $\boldsymbol{D}$ является вращательно инвариантным, и мы имеем конфигурационное пространство $R^3 \otimes \otimes S^2$. Однако два различных выбора $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ можно связать посредством калибровочного преобразования при условии, что используется групповое пространство S^3 группы SU(2). Следовательно, мы можем представить $\boldsymbol{J}$ на $L^2(S^3)$, и поэтому допускаются как целочисленные, так и полуцелочисленные значения спина.

(См. [423] и [63].)

§ 2.2. Рассмотрите дифференциальное уравнение

$$(H - W)\,u = \left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 + \frac{K}{q^2} - W\right) u = 0, \quad 0 < q < \infty.$$

Положите

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + \frac{K}{q^2}\right), \quad T = \frac{1}{4}(pq + qp), \quad \Gamma_4 = \frac{1}{4}(H - 2q^2)$$

и вычислите спектр оператора H с помощью представлений алгебры o(2, 1) [§ 2, соотношения (1)].

Указание. $C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \frac{1}{4}\left(K - \frac{3}{4}\right)$.

§ 2.3. Покажите, что радиальное волновое уравнение Шредингера для N-мерного осциллятора с добавочным потенциалом a/r^2 может быть приведено к виду, заданному в предыдущем упражнении.

§ 2.4. Покажите, что радиальное волновое уравнение для нерелятивистской задачи Кеплера также можно привести к виду, заданному в упражнении 2.2, при помощи подходящих подстановок, и получите формулу Бальмера.

Указание. $\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar r} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right] u_l(r) = 0.$ Положите $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$, $q = (2r\sqrt{-\varepsilon})^{1/2}$, $u_l(r) = (2r\sqrt{-\varepsilon})^{1/4}\,\tilde{u}_l(q)$, $K = \frac{3}{4} + 4l(l+1)$, $W = \frac{4me^2}{\sqrt{-2E}}$.

§ 2.5. Рассмотрите уравнение

$$[(1 + b)\,\Gamma_0 + (1 - b)\,\Gamma_4 + c]\,\tilde{\psi} = 0,$$

где Γ_0, Γ_4 и T — те же генераторы группы SO(2, 1), что и выше. Многие из уравнений квантовой теории могут быть записаны в этом виде. Дайте полную классификацию решений этого уравнения как функции параметров b, c и собственных значений оператора Казимира $C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = \varphi(\varphi + 1)$ (см. 11.10.7.6).

а) Пусть $\tilde{\psi} = e^{i\theta T}\psi$, $\operatorname{th}\theta = \frac{b-1}{b+1}$; тогда $\left[b^{1/2}\Gamma_4 + \frac{c}{2}\right]\psi = 0$. Найдите область значений спектра для дискретной, основной и дополнительной серий представлений so(2, 1).

б) Пусть $\tilde{\psi} = e^{i\theta T}\psi$, $\operatorname{th}\theta = \frac{b+1}{b-1}$, тогда $\left[(-b)^{1/2}\Gamma_4 + \frac{c}{2}\right]\psi = 0$. Определите сущность и область значений спектров (заметим, что Γ_0 имеет дискретный, а Γ_4 — непрерывный спектр).

(См. [61].)

§ 2.6. *Появление основной и дополнительной серий* $o(2, 1)$ *и самосопряженное расширение гамильтонианов.* Рассмотрите представление алгебры $o(2, 1)$, заданное согласно

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\left(r\pi^2 - \frac{a}{r} + r\right), \quad \Gamma_4 = \frac{1}{2}\left(r\pi^2 - \frac{a}{r} - r\right), \quad T = r\cdot\pi - i$$

(π определено в лемме 5, § 2).

Покажите, что в этом представлении оператор Казимира C_2 имеет значение $J^2 - \mu^2 - a$. Покажите, что, как и в леммах 3, 4, мы можем решить уравнение с гамильтонианом $H = \pi^2 + a/r^2 + b + c/r$. Для больших положительных a H уже не является самосопряженным [449]. Пусть $C_2 = \varphi(\varphi + 1)$ и для простоты $\mu = 0$. Покажите, что при $a < j(j+1)$, $C_2 > 0$, мы должны использовать дискретные серии представлений $o(2, 1)$. При $j(j+1) < a < j(j+1) + \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < C_2 < 0$, мы должны использовать дополнительную серию представлений, а при $a > j(j+1) + \frac{1}{4}$, $C_2 < -\frac{1}{4}$, т. е. $\varphi = -\frac{1}{2} + i\lambda$, мы должны использовать основную серию унитарных представлений группы $O(2, 1)$. Примечательно, что в физических задачах появляются все *три* серии представлений $O(2, 1)$ и что динамическая группа дает метод самосопряженного расширения для класса гамильтонианов, который включает релятивистский гамильтониан Дирака для кулоновской задачи [61].

§ 2.7. *Тензорный метод для алгебры* so (4, 2); *подалгебры* so (4), su (2), su (1, 1), *коэффициенты Клебша — Гордана.* Рассмотрите две алгебры su (2) с генераторами

$$(J_1)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(a^*\sigma_k a), \quad (J_2)_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(b^*\sigma_k b), \tag{1}$$

где $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ — два бозонных оператора уничтожения, $[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, и σ_k — матрицы Паули.

Покажите, что в su (2) $\otimes$ su (2)-базисе с векторами

$$\begin{gathered} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = N^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} a_1^{*j_1 - m_1} a_2^{*j_1 + m_1} b_1^{*j_2 + m_2} b_2^{*j_2 - m_2} |0\rangle, \\ (N^{j_1 j_2}_{m_1 m_2})^{-2} = [(j_1 + m_1)!\,(j_1 - m_1)!\,(j_2 + m_2)!\,(j_2 - m_2)!] \end{gathered} \tag{2}$$

базисные элементы алгебры su (2, 2) представляются в виде

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[a^*\sigma_k a + b^*\sigma_k b] = (J_1)_{ij} + (J_2)_{ij} = J_{ij},\\
L_{i4} &= -\frac{1}{2}(a^*\sigma_i a - b^*\sigma_i b) = A_i,\\
L_{i5} &= -\frac{1}{2}(a^*\sigma_i C b^* - aC\sigma_i b) = M_i,\\
L_{i6} &= \frac{1}{2i}(a^*\sigma_i C b^* + aC\sigma_i b) = \Gamma_i,\\
L_{46} &= \frac{1}{2}(a^*Cb^* + aCb) = T,\\
L_{45} &= \frac{1}{2i}(a^*Cb^* - aCb) = \Gamma_4,\\
L_{56} &= \frac{1}{2}(a^*a + b^*b + 2) = \Gamma_0, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Докажите, что наиболее вырожденные дискретные самосопряженные неприводимые представления характеризуются собственным значением $\mu = j_1 - j_2$ оператора

$$K = \frac{1}{2}(a^*a - b^*b), \quad [K, L_{ab}] = 0 \quad \text{для всех} \quad a, b. \tag{4}$$

и что это в точности соответствует представлению, заданному в (2.22) посредством дифференциальных операторов с операторами Казимира $C_2 = -3(1 - \mu^2)$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Базис $|\mu, m, n, \alpha\rangle$, где параметры являются собственными значениями K, L_{12}, L_{56} и L_{34} соответственно, мы называем параболическими состояниями. Прямым вычислением найдите

$$\mu = j_1 - j_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad n = j_1 + j_2 + 1, \quad \alpha = m_2 - m_1$$

и покажите, что серии представлений удовлетворяют соотношению представления

$$\{L_{AB}, L_C^A\} = L_{AB}L_C^A + L_C^A L_{AB} = 2(\mu^2 - 1)g_{BC}, \quad A, B, C = 1, 2, \ldots, 6.$$

Рассмотрите сужение ($J_k = \varepsilon_{klm}J_{lm}$)

$$\mathrm{su}(2) \otimes \mathrm{su}(2) \supset \mathrm{su}(2) \supset u(1), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2.$$

Сферический базис $|\mu, m; n; j(j+1)\rangle$ (собственные векторы для K, L_{12}, L_{56}, $\boldsymbol{J}^2$) определяем согласно

$$|(j_1j_2)jm\rangle = \sum_{m_1m_2} \langle j_1m_1j_2m_2|(j_1j_2)jm\rangle\, |j_1m_1j_2m_2\rangle\, \delta_{m_1+m_2,\, m}. \tag{5}$$

Это разложение можно рассматривать как выражение сферических состояний через параболические состояния.

Затем рассмотрите подгруппу $O(2, 1) \times O(2, 1) \subset O(4, 2)$, порождаемую при помощи

$$N_1^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{46} + (3 - 2r) L_{35}),$$
$$N_2^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{45} - (3 - 2r) L_{36}), \tag{6}$$
$$N_3^{(r)} = \frac{1}{2}(L_{56} + (3 - 2r) L_{34}), \quad r = 1, 2,$$

и состояния

$$|\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = N b_1^{*n_1+\varphi_1-1} a_2^{*n_1-\varphi_1} a_1^{*n_2+\varphi_2-1} b_2^{*n_2-\varphi_2} |0\rangle,$$
$$N^{-2} = [(n_1 + \varphi_1 - 1)!\,(n_1 - \varphi_1)!\,(n_2 + \varphi_2 - 1)!\,(n_2 - \varphi_2)!], \tag{7}$$

где

$$N_3^{(r)} |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = n_r |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle, \quad r = 1, 2,$$
$$N^{(r)2} |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle = \varphi_r (\varphi_r - 1) |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle, \quad r = 1, 2, \tag{8}$$
$$N^{(r)2} = N_3^{(r)2} - N_1^{(r)2} - N_2^{(r)2}, \quad r = 1, 2.$$

Затем в редукции

$$\mathrm{su}(1, 1) \otimes \mathrm{su}(1, 1) \supset \mathrm{su}(1, 1) \supset u(1)$$

с $N = N^{(1)} + N^{(2)}$ покажите, что

$$|(\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle = \sum_{n_1 n_2} \langle \varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2 | (\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle |\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle \delta_{n_1+n_2,\, n}. \tag{9}$$

Докажите, что дискретная вырожденная серия представлений $O(4, 2)$ имеет свойство

$$J^2 = N^2. \tag{10}$$

Значит, в базисе $|(\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle$ набор K, J^2, L_{56}, L_{12} также диагонален с $\mu = \varphi_2 - \varphi_1$, $m = \varphi_1 + \varphi_2 - 1$, $n = n_1 + n_2$. С другой стороны, в состояниях $|\varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2\rangle$ набор K, L_{12}, L_{56}, L_{34} диагонален с $\alpha = n_1 - n_2$.

Таким образом, (5) и (9) представляют собой разложения $O(4, 2)$-состояний по таким же состояниям; следовательно, покажите, что при подходящем сопоставлении индексов коэффициенты Клебша — Гордана группы SU(2) совпадают с коэффициентами Клебша — Гордана группы SU(1, 1) для связывания дискретных серий представлений, а именно

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | (j_1 j_2) jm\rangle = \langle \varphi_1 n_1 \varphi_2 n_2 | (\varphi_1\varphi_2)\varphi n\rangle,$$

где

$$j_1 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \varphi_2 - \varphi_1 - 1),$$

$$j_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \varphi_1 - \varphi_2 - 1),$$

$$m_1 = \frac{1}{2}(n_2 - n_1 + \varphi_2 + \varphi_1 - 1),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + \varphi_2 + \varphi_1 - 1),$$

$$j = \varphi - 1, \quad m = \varphi_1 + \varphi_2 - 1$$

и

$$\mu = j_1 - j_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

§ 2.8. *Когерентные состояния для* SU(1, 1). Для алгебры Гейзенберга $\{1, a, a^*\}$ с $[a, a^*] = 1$ когерентные состояния $|z\rangle$ являются собственными состояниями оператора a:

$$a|z\rangle = z|z\rangle,$$

и могут быть записаны в виде

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{|z|^2/2} e^{za^*} |0\rangle$$

через собственные состояния $|n\rangle$ оператора числа a^*a. Они удовлетворяют $\langle z|z\rangle = 1$, $\langle z'|z\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2 + \bar{z}'z\right]$,

$$\frac{1}{\pi}\int |z\rangle\langle z|\, d^2z = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1.$$

Для алгебры su(1, 1), $\{L^+, L^-, L_3\}$ с

$$[L^+, L^-] = -L_3, \quad [L_3, L^\pm] = \pm L^\pm$$

определите аналогичные когерентные состояния согласно

$$L^-|z\rangle = z|z\rangle.$$

Покажите, что для представлений дискретной серии $D(\varphi)$,

$$|z\rangle = [\Gamma(-2\varphi)]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}z)^n}{[n!\,\Gamma(-2\varphi+n)]^{1/2}} |\varphi, n\rangle,$$

разложение единицы равно

$$\frac{4}{\pi\Gamma(-2\varphi)} \int r\,dr\,d\theta\,(\sqrt{2}r)^{-2\varphi-1} K_{\varphi+1/2}(2\sqrt{2}r)|z\rangle\langle z| = 1,$$

$$z = re^{i\theta},$$

и мы получаем семейство гильбертовых пространств целых функций степени роста (1, 1) [76].