Глава 13

Теория групп и представления групп в квантовой теории

§ 1. Представления групп в физике

Дискретные и непрерывные группы в классической физике встречаются как группы преобразований, выражая обычно симметрию динамических уравнений частиц или полей; таковы симметрия кристалла, группы Галилея, Пуанкаре или Эйнштейна преобразований пространства-времени, группа канонических преобразований, действующих на фазовом пространстве, группа калибровочных преобразований, или конформных преобразований электромагнитных потенциалов, симплектическое преобразование термодинамической функции и т. п. Мы дали даже структуру алгебры Ли в скобках Пуассона классической механики и классической теории поля, для которых канонические преобразования действуют как группа автоморфизмов. Однако во всех этих случаях встречается только определяющее представление (самопредставление) групп. Для теории представлений групп в линейных пространствах, которая является предметом данной книги, сферой приложения в действительности является квантовая физика. Особая приспособленность теории представлений групп к квантовой физике обусловлена следующей основной кинематической разницей между классической и квантовой теориями. Как в классической, так и в квантовой теории физическая система может быть описана при помощи понятия «состояние», и в обоих случаях система имеет континуально бесконечное множество состояний. В квантовой теории благодаря линейности уравнений движения состояния представляются в виде линейных комбинаций выделенных ортогональных наборов состояний, зачастую множества, состоящего из счетного числа элементов; т. е. состояния образуют линейное векторное пространство. Напротив, в классическом случае динамические уравнения, записанные через координаты и импульсы, нелинейны; следовательно, такого множества базисных состояний не существует.

Групповую структуру физических теорий можно изучать, используя следующие два различных подхода.

А. *Теории, основанные на динамических уравнениях*

В большинстве физических теорий постулируется некоторая совокупность динамических уравнений, например уравнения механики частицы, динамики жидкости или газа, электродинамики,

статистической и квантовой механики. Эти уравнения определяют поведение функций ψ от координат частицы или поля и могут быть записаны в виде

$$L\psi = 0. \tag{1}$$

Эти уравнения могут быть линейными или нелинейными, дифференциальными или интегральными уравнениями или же более общими операторными уравнениями. Роль теории групп в этом подходе — облегчить решение уравнения (1) и помочь лучше узнать структуру лежащей в его основе динамики. Если исходить из этой точки зрения, то мы приходим к изучению пространства Φ решений уравнения (1). Для того чтобы охарактеризовать это пространство, мы можем сначала искать совокупность операторов $\{X_i\}$, для которых

$$X_i\psi \in \Phi, \quad \text{если} \quad \psi \in \Omega \subset \Phi, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Для класса операторов X_i имеем тогда свойство $[L, X_i]\psi = 0$ и $[L, [X_i, X_j]]\psi = 0$; затем мы можем наделить это множество структурой алгебры Ли. Заметим, что X_i являются общими операторами, преобразующими в общем случае как аргументы ψ, так и вид самой ψ. В более общей постановке мы можем иметь $[L, X_i]\psi = \lambda L\psi$, т. е. справа — кратное уравнения (1), что снова приводит к структуре алгебры Ли на пространстве решений.

Если такая формулировка возможна, множество $\{X_i\}$ содержит не только обычные операции симметрии, но также более общие преобразования динамической симметрии.

В частности, пусть Y — оператор, удовлетворяющий уравнению на собственные значения

$$Y\psi_n = y_n\psi_n, \quad \psi_n \in \Omega.$$

Для максимального подмножества C операторов, таких, что

$$[C_i, Y] = 0, \quad C_i \in C,$$

имеем

$$Y(C_i\psi_n) = y_n(C_i\psi_n),$$

т. е. «значение» оператора Y «сохраняется» в результате операции C_i. Множество C является алгеброй симметрии по отношению к величине Y. В частности, если Y — гамильтониан системы в классической или квантовой механике, то C называется *алгеброй симметрии*, или *алгеброй вырождения энергии*.

Формально этот подход для классической и квантовой теорий одинаков и приводит непосредственно к алгебрам Ли, а не к группам Ли, при условии, что мы умеем определять произведение операторов. Эти рассуждения могут основываться также и на вариационном принципе, взятом вместо уравнения (1).

Напротив, в следующем подходе понятие групп играет фундаментальную роль.

Б. *Теории, основанные на предписанных симметриях*

Если динамические уравнения системы неизвестны, то для того, чтобы установить или угадать уравнения, можно руководствоваться общими принципами симметрии либо можно исследовать общие свойства системы, которые следуют из предписанных симметрий. Типичными примерами являются общий принцип ковариантности Эйнштейна в общей теории относительности или свойства S-матрицы взаимодействия элементарных частиц.

В. *Понятие об относительности*

В евклидовой геометрии все точки являются неразличимыми и существуют объективно, тогда как координаты вводятся искусственно. Все декартовы координаты равноправны. Таким образом, объективные свойства точек должны быть независимыми от выбора системы координат. Координаты точки в различных системах связываются при помощи группы преобразований, либо же преобразование из группы переводит одну точку в другую (пассивная и активная точки зрения соответственно). Таким образом, имеем группу автоморфизмов нашей геометрии. Обратно, любая группа преобразований может служить в качестве группы автоморфизмов некоторой геометрии. Характеристика геометрии при помощи ее группы автоморфизмов является основной идеей в Эрлангенской программе Клейна [463]. Это понятие об относительности систем координат с точек распространяется на линии, площади, ...и на физические величины, такие, как силы, скорости, поля... Вообще, физические процессы, происходящие в некоторый момент времени в некотором месте, являются независимыми от наблюдателя (систем отсчета). Все наблюдатели в классе равноправны. Наблюдатели связаны друг с другом посредством группы преобразований или преобразование переводит одного наблюдателя в другого. Эта группа преобразований является группой автоморфизмов физической теории или физического закона. Класс наблюдателей, связанных при помощи этой группы преобразований, физики называют также инерциальными системами отсчета. Это понятие является основным для большинства кинематических применений теории групп в физике.

Начнем с общей кинематической схемы квантовой теории, которая существенна для формулировки принципов симметрии и для использования группы симметрии и динамической группы.

§ 2. Кинематические постулаты квантовой теории

Принцип суперпозиции и вероятностная интерпретация

Свое начало квантовая теория берет из волновых свойств материи. Наиболее важное свойство волнового явления — это свой-