Б. *Теории, основанные на предписанных симметриях*

Если динамические уравнения системы неизвестны, то для того, чтобы установить или угадать уравнения, можно руководствоваться общими принципами симметрии либо можно исследовать общие свойства системы, которые следуют из предписанных симметрий. Типичными примерами являются общий принцип ковариантности Эйнштейна в общей теории относительности или свойства S-матрицы взаимодействия элементарных частиц.

В. *Понятие об относительности*

В евклидовой геометрии все точки являются неразличимыми и существуют объективно, тогда как координаты вводятся искусственно. Все декартовы координаты равноправны. Таким образом, объективные свойства точек должны быть независимыми от выбора системы координат. Координаты точки в различных системах связываются при помощи группы преобразований, либо же преобразование из группы переводит одну точку в другую (пассивная и активная точки зрения соответственно). Таким образом, имеем группу автоморфизмов нашей геометрии. Обратно, любая группа преобразований может служить в качестве группы автоморфизмов некоторой геометрии. Характеристика геометрии при помощи ее группы автоморфизмов является основной идеей в Эрлангенской программе Клейна [463]. Это понятие об относительности систем координат с точек распространяется на линии, площади, ...и на физические величины, такие, как силы, скорости, поля... Вообще, физические процессы, происходящие в некоторый момент времени в некотором месте, являются независимыми от наблюдателя (систем отсчета). Все наблюдатели в классе равноправны. Наблюдатели связаны друг с другом посредством группы преобразований или преобразование переводит одного наблюдателя в другого. Эта группа преобразований является группой автоморфизмов физической теории или физического закона. Класс наблюдателей, связанных при помощи этой группы преобразований, физики называют также инерциальными системами отсчета. Это понятие является основным для большинства кинематических применений теории групп в физике.

Начнем с общей кинематической схемы квантовой теории, которая существенна для формулировки принципов симметрии и для использования группы симметрии и динамической группы.

§ 2. Кинематические постулаты квантовой теории

Принцип суперпозиции и вероятностная интерпретация

Свое начало квантовая теория берет из волновых свойств материи. Наиболее важное свойство волнового явления — это свой-

ство суперпозиции, или интерференции: линейные комбинации решений также являются решениями волнового уравнения, так как уравнение линейно. Кроме того, волны материи описывают скорее амплитуды вероятности, чем амплитуды для некоторых плотностей частиц или полей. В совокупности две эти фундаментальные физические идеи дают нам общую схему, в которой физические состояния ψ, φ, ... описываются при помощи элементов линейного пространства, а наблюдаемые положительно определенные условные вероятности представляются квадратом полубилинейных форм $|(\psi, \varphi)|^2$. Исторически сложилось так, что, поскольку в простых случаях пространство решений волновых уравнений (например, уравнения Шредингера) можно вложить в гильбертово пространство, теория традиционно формулировалась в рамках гильбертова пространства вплоть до ее аксиоматизации фон Нейманом. Однако две основные физические идеи допускают более общие пространства физических состояний. Требование, чтобы включались предельные точки последовательностей состояний ψ_n, дает общее топологическое векторное пространство V и сопряженное ему пространство V', так что полубилинейные формы (амплитуды вероятности) могут быть взяты в виде

$$(\psi, \varphi), \quad \varphi \in V \quad \text{и} \quad \psi \in V'.$$

Даже в рамках формализма гильбертова пространства часто оказывается удобным пользоваться более общим формализмом и использовать гельфандов триплет

$$\Phi \subset H \subset \Phi',$$

где Φ — плотное ядерное подпространство в гильбертовом пространстве H, а Φ' — пространство, сопряженное с Φ, чтобы охватить операторы с непрерывным спектром и их обобщенные собственные векторы в Φ', которые не являются нормируемыми (см. приложение Б).

Помимо этих математических обобщений схемы квантовой теории в использовании более общих пространств в будущем могут также рассматриваться физические обобщения теории, например можно ослабить универсальность выполнения линейности состояний, т. е. принципа суперпозиции. Имея в виду эти моменты, в этом параграфе мы опишем стандартную форму квантовых постулатов и роль представлений групп.

Состояния и лучи

Основной структурой описания физической системы в квантовой теории является линейное пространство H, единичные лучи которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с состояниями системы, называемыми *чистыми состояниями. Единичный*

луч Ψ — это совокупность векторов $\{\lambda\psi\}$, $\|\psi\| = 1$, $\lambda = \exp(i\alpha)$, $\psi \in H$. Причина того, что введение лучей предпочитается самим векторам, заключается а) в использовании пространства над комплексными числами и б) в основной вероятностной интерпретации квантовой теории. Величины, связанные с наблюдаемыми эффектами, являются абсолютными значениями полубилинейной формы $|(\psi, \varphi)|^2$, не зависящими от параметров λ, λ', характеризующих луч. Следовательно, пространство лучей есть фактор-пространство $H = H/S^1$, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из H.

Основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства H включает в себя *принцип суперпозиции* квантовой теории, а именно существование набора базисных состояний, таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций. Таким образом, если лучи $\{\lambda\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, описывают физические состояния, то $\psi'_\alpha = \sum_n a_n\psi_n$ — другой вектор в H, так что луч $\{\lambda\psi'_\alpha\}$ соответствует другому возможному состоянию системы. Отметим, что $\psi'_\alpha = \sum_n a_n\psi_n$ и $\lambda\psi'_\alpha$ представляют одно и то же состояние, но $\sum_n a_n(\lambda_n\psi_n)$ в общем случае является другим состоянием, хотя ψ_n и $(\lambda_n\psi_n)$ представляют одно состояние. В этом и заключается проблема относительных фаз в квантовой теории.

Состояния, которые могут быть получены одно из другого при помощи линейных суперпозиций, называются чистыми «когерентными» состояниями.

Правила суперотбора

Вообще говоря, существуют физические ограничения на выполнимость принципа суперпозиции. Чистые состояния нельзя реализовать в виде суперпозиции некоторых состояний: например, нельзя образовать чистое состояние, состоящее из положительно и отрицательно заряженной частицы, или чистое состояние, состоящее из фермиона и бозона. Это не означает, что два таких состояния не могут взаимодействовать; это лишь означает, что их формальная линейная комбинация не является физически реализуемым чистым состоянием (правило суперотбора). Существование правил суперотбора связано с измеримостью относительной фазы такой суперпозиции и зависит от остальных свойств системы, таких, как заряд, барионное число и т. п. Правило суперотбора на фермионы (т. е. разделение состояний с целым числом фермионов и состояний с полуцелым числом фермионов) вытекает из вращательной инвариантности (см. ниже). Во всех таких случаях мы разделяем линейное пространство H на подмножества таким

образом, что принцип суперпозиции выполняется в каждом подмножестве. Эти подмножества называются *когерентными подпространствами*. В каждом подпространстве $\sum \alpha_n \psi_n$ и $\lambda \sum \alpha_n \psi_n$ соответствуют одному и тому же состоянию, но $\sum \alpha_n \psi_n$ и $\sum \alpha'_n \psi_n$ в общем случае соответствуют различным состояниям. К этой проблеме мы вернемся в конце данного параграфа.

Вероятностная интерпретация

Физические эксперименты состоят в приготовлении определенных состояний, в приведении их во взаимодействие и в наблюдении частоты появления других хорошо определенных состояний. Вероятность перехода между двумя состояниями ψ и φ определяется квадратом полубилинейной формы $|(\psi, \varphi)|^2$. Мы можем также говорить о вероятности перехода между двумя лучами Ψ и Φ, так как эта величина одинакова для всех векторов лучей; полные фазы несущественны. Однако если ψ и φ сами являются линейными комбинациями некоторых базисных векторов, то вероятность перехода зависит от относительных фаз их компонент. Величину $|(\psi, \varphi)|^2$ можно связать, умножая ее на определенные кинематические множители, с экспериментально наблюдаемыми величинами, такими, как сечения реакций и времена жизни нестабильных состояний.

Динамическая задача

Чтобы вычислять величины вроде $|(\psi, \varphi)|^2$, мы должны иметь определенную реализацию линейного пространства H и должны получать *число*, которое можно сравнивать с экспериментом. Таким образом, мы нуждаемся в определенном обозначении состояний ψ, φ, ... и в определенном выражении для полубилинейного произведения. Эту реализацию будем называть *конкретным линейным пространством*. Это наиболее важная и наиболее трудная часть теории. Хотя все гильбертовы пространства одинаковой размерности изоморфны и можно преобразовать одну реализацию в другую, необходима некоторая вполне определенная явная реализация с физическим соответствием.

Если структура линейного или гильбертова пространства дает *кинематический принцип* квантовой теории, то явное вычисление состояний ψ, φ, ... или полубилинейных (или скалярных) произведений (ψ, φ) является *динамической* частью квантовой теории.

В простых случаях динамические задачи решаются постулированием дифференциального уравнения для состояний ψ, φ, ..., представляемых, например, как элементы из $H = L^2(R^3)$, и отождествлением всех решений уравнения со всеми состояниями физической системы. Это имеет место в теории Шредингера. Для более

сложных систем либо для неизвестных новых систем это невозможно. Даже если мы знаем все состояния изолированной системы, измерения над системой производятся с помощью добавочных внешних взаимодействий, которые изменяют систему.

При отсутствии полного вычисления полубилинейных произведений (ψ, φ) некоторые весьма общие принципы позволяют вывести ряд важных свойств симметрии этих величин. Именно в этом направлении было развито традиционное использование представлений групп в квантовой теории. Впоследствии гильбертово пространство квантовой теории было отождествлено с явным пространством реализации представлений более общих групп и алгебр. В этом смысле представления групп также решают динамическую задачу. Мы будем развивать оба эти аспекта. Для определенности в дальнейшем пространство состояний мы будем считать гильбертовым пространством.

Эквивалентное описание, или операции симметрии

Как и при всяком соответствии сначала следует рассмотреть эквивалентные отображения между физическими состояниями и лучами в гильбертовом пространстве, так как знание физически эквивалентных описаний системы уже отражает, как мы увидим, существенные свойства самой системы.

Если одна и та же физическая система может быть описана двумя различными способами в одном и том же когерентном подпространстве гильбертова пространства H один раз лучами Ψ_1, Φ_1, ... и другой раз лучами Ψ_2, Φ_2, ... (например двумя различными наблюдателями) таким образом, что одно и то же физическое состояние в первом случае описывается при помощи Ψ_1, а во втором — при помощи Ψ_2, так что эквивалентно можно говорить об операции симметрии системы, то вероятности переходов должны быть одинаковыми по определению физической эквивалентности. Имеем тогда сохраняющее норму отображение $\hat{T}$ между лучами Ψ_1 и Ψ_2. С математической точки зрения более удобно отыскать соответствующее отображение $H \to H$ между векторами ψ, φ, ... в гильбертовом пространстве. Так как инвариантны только абсолютные значения, преобразование в гильбертовом пространстве может быть либо унитарным, либо антиунитарным. Действительно, можно доказать, что если даны два описания системы в пространстве лучей, то *можно выбрать* единичные векторы ψ_1, φ_1, ... из лучей Ψ_1, Φ_1, ... в первом описании и единичные векторы ψ_2, φ_2, ... из лучей Ψ_2, Φ_2, ... во втором описании, такие, что соответствие $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$, $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, ... либо *унитарно*, либо *антиунитарно*. Это означает, что можно *построить* унитарное или антиунитарное соответствие $H \leftrightarrow H$. Точнее имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (Вигнер). *Пусть* $\Psi_2 = \widehat{T}\Psi_1$ — *отображение лучей гильбертова пространства* H, *сохраняющее внутреннее произведение лучей. Тогда существует отображение* $\psi_2 = T\psi_1$ *всех векторов из* H, *такое, что* $T\psi$ *принадлежит лучу* $\widehat{T}\Psi$, *если* ψ *принадлежит лучу* Ψ, *и, кроме того,* 1° $T(\psi + \varphi) = T\psi + T\varphi$, 2 $T(\lambda\psi) = \chi(\lambda)\, T(\psi)$, 3° $(T\psi, T\varphi) = \chi[(\psi, \varphi)]$, *где либо* $\chi(\lambda) = \lambda$ (*унитарный случай*), *либо* $\chi(\lambda) = \bar{\lambda}$ (*антиунитарный случай*) *для всех* λ.

Доказательство. Пусть $\psi_1, \varphi_1, \ldots$ и $\psi_2, \varphi_2, \ldots$ — два набора ортонормированных базисов, выбранных из первой и второй совокупностей лучей соответственно. Нам дано преобразование, которое сохраняет абсолютные значения. Задача состоит в том, чтобы *построить* соответствующее преобразование T, действующее на векторы, при помощи подходящего выбора фаз. Априори могло бы быть, что $T\psi_1 = c_1\psi_2$, $T\varphi_1 = c_2\varphi_2, \ldots$ и что между числами c нельзя установить никаких соотношений; в этом случае T даже не линейный оператор. Фактически мы хотим показать, что T может быть определен таким образом, что он является унитарным или антиунитарным оператором.

Выделим единичный вектор ψ_1, выберем ψ_2 и определим $T\psi_1 = \psi_2$. Это единственный произвольный выбор; покажем, что все остальные фазы однозначно определены. Таким образом, T определен с точностью до общего фазового множителя.

Рассмотрим вектор $\psi_1 + \varphi_1$, где φ_1 ортогонален ψ_1. Легко показать, что вектор — представитель соответствующего луча во втором описании — равен $a\psi_2 + b\varphi_2$. Имеем тогда

$$T(\psi_1 + \varphi_1) = c(a\psi_2 + b\varphi_2) = \psi_2 + b'\varphi_2,$$

где мы должны иметь $c = 1/a$ согласно предыдущему выбору и положим $cb = b' = b/a$. Теперь *определим* $T\varphi_1$ через $T(\psi_1 + \varphi_1) - \psi_2$ или просто через $b'\varphi_2$. Следовательно, мы можем положить

$$T(\psi_1 + \varphi_1) = T\psi_1 + T\varphi_1.$$

Аналогично, для общего $f_1 = a_\psi\psi_1 + a_\varphi\varphi_1 + \ldots$ выбираем представитель $f_2 = \widehat{a}_\psi\psi_2 + \widehat{a}_\varphi\varphi_2 + \ldots$, записываем $Tf_1 = cf_2$ с $\widehat{ca}_\psi = a_\psi$, так что

$$\begin{aligned} T(a_\psi\psi_1 + a_\varphi\varphi_1 + \ldots) &= a_\psi\psi_2 + \widehat{ca}_\varphi\varphi_2 + \ldots \\ &= a_\psi T\psi_1 + a'_\varphi T\varphi_1 + \ldots \end{aligned}$$

Теперь возьмем абсолютные значения скалярных произведений

$$|(\psi_1 + \varphi_1, f_1)| = |a_\psi + a_\varphi|$$

и

$$|(T\psi_1 + T\varphi_1, Tf_1)| = |a_\psi + a'_\varphi|.$$

Эти два числа должны быть равными. Это плюс тот факт, что $|a'_\varphi| = |a_\varphi|$, позволяет нам вычислить a'_φ через a_φ и a_ψ. Получаются два решения:

$$a'_\varphi = a_\varphi \quad \text{и} \quad a'_\varphi = \bar{a}_\varphi \frac{a_\psi}{\bar{a}_\psi}.$$

Ясно, что для первого решения T линейно и унитарно. Для второго решения находим $Tf_1 = (a_\psi/\bar{a}_\psi)[\bar{a}_\psi T\psi_1 + \bar{a}_\varphi T\varphi_1 + \ldots]$. Общий фазовый множитель является несущественным, и при помощи новой нормировки T, которая не меняет выбора $T\psi_1 = \psi_2$, получаем *антиунитарный* оператор.

Замечания. 1. Две возможности в теореме 1 происходят от того факта, что комплексное поле обладает двумя (и только двумя) автоморфизмами, сохраняющими абсолютные значения: тождественным автоморфизмом и комплексным сопряжением. В случае гильбертова пространства над вещественным полем теорема Вигнера дает только унитарные преобразования (с точностью до фазы), поскольку единственным автоморфизмом вещественного поля является тождественный автоморфизм. Фактически теорема Вигнера тесно связана с фундаментальной теоремой проективной геометрии.

2. В заданной ситуации встречается один из двух случаев. Является ли преобразование унитарным или антиунитарным, зависит от других свойств двух эквивалентных описаний системы. Это не зависит, однако, от выбора векторов ψ, φ, ... из лучей; если преобразование, например, унитарно для выбора ψ_1, φ_1, ..., то не существует другого выбора $\lambda\psi_1$, $\lambda'\varphi_1$, ..., такого, что оно становится антиунитарным, и наоборот. Более того, как только вектор ψ_2 выбран, остальные векторы φ_2, χ_2, ... определяются однозначно из требования, чтобы соответствие было унитарным (или антиунитарным).

Преобразования симметрии

Описание *свойств симметрии* системы в стандартном смысле относится к ситуации, охарактеризованной в предыдущей теореме, так как если при преобразовании симметрии измеряемые вероятности остаются без изменения, мы автоматически получаем два эквивалентных описания в H — одно, соответствующее исходной, и другое, соответствующее преобразованной системам отсчета. Эти два описания должны быть связаны одно с другим посредством унитарных (или антиунитарных) преобразований. Обратно (и это является, с нашей точки зрения, более важным), *гильбертово пространство состояний должно быть изоморфным пространству унитарных (или антиунитарных) представлений пре-*

образований симметрии (они могут образовывать группу или алгебру и т. п.). Заметим, что мы хотим получить конкретное гильбертово пространство, чтобы вычислять вероятности переходов. Таким образом, если мы знаем преобразования симметрии системы, для построения гильбертова пространства H мы можем исходить из произвольного *набора* пространств неприводимых унитарных (или антиунитарных) представлений. Это решает задачу частично, но не полностью, поскольку мы не знаем, *какой* набор неприводимых представлений мы имеем. Явный вид операций симметрии рассматривается в § 3.

Единственность операторов

Мы говорили, что векторы-представители из лучей двух эквивалентных описаний могут быть выбраны таким образом, что отображение векторов $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ является либо унитарным, либо антиунитарным. В квантовой теории есть еще и другая важная проблема — проблема фаз, и она касается *единственности* унитарного (или антиунитарного) соответствия $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. Из доказательства теоремы Вигнера следует, что это соответствие является единственным *с точностью до общего фазового множителя.*

Представления лучей или проективные представления

Если имеется два эквивалентных описания с лучами Ψ_1, Φ_1, ... и Ψ_2, Φ_2, ... соответственно, отвечающие одним и тем же физическим состояниям, видимым двумя различными наблюдателями (пассивная точка зрения), или с лучами Ψ_1, Φ_1, ..., отвечающими состояниям $\{s\}$ в первом описании и преобразованным состояниям $\{gs\}$ во втором описании (активная точка зрения), то мы знаем, что можно выбрать векторы $\psi_1 \in \Psi_1$, $\psi_2 \in \Psi_2$, ..., такие, что

$$\psi_2 = T_g\psi_1, \qquad \varphi_2 = T_g\varphi_1, \ \ldots . \tag{1}$$

Это значит, что если ψ_1 — вектор, ассоциированный с лучом Ψ_1, то $T_g\psi_1$ — вектор, ассоциированный с лучом Ψ_1. Если же существуют два оператора T_g и $T_{g'}$ со свойством (1), то они могут отличаться только постоянным множителем, по модулю равным единице. Этот результат проявляется в групповом законе умножения преобразований, поскольку произведение двух преобразований $T_gT_{g'}$ дает тот же результат, что и преобразование $T_{gg'}$. Следовательно,

$$T_{gg'} = \omega(g, g')\, T_gT_{g'}, \tag{2}$$

где $\omega(g, g')$ — фазовый множитель. Поскольку T_g — представление группы симметрии, групповой закон для представлений является более общим, чем сам групповой закон $g(g's) = (gg')s$. Представления типа (2) называются «лучевыми представлениями»,

или «представлениями с точностью до множителя», или «проективными представлениями». Это также является проявлением того факта, что мы имеем соответствие между физическими состояниями и лучами в гильбертовом пространстве, а не векторами.

Определение. *Лучевое* (или проективное) *представление* T топологической группы G — это непрерывный гомоморфизм T: $G \to L(\hat{H})$, множество линейных операторов в проективном пространстве $\hat{H}$ с фактор-топологией относительно отображения $\hat{H} \to H$, т. е. $\psi \to \Psi$.

Хотя представление T определяется с точностью до произвольного множителя, фаза $\omega(g, g')$ в равенстве (2) не является произвольной. Прежде всего две системы фаз $\omega(g, g')$ и $\omega'(g, g')$ можно определить как эквивалентные, если

$$\omega'(g, g') = \omega(g, g') \frac{c(gg')}{c(g)\,c(g')}, \qquad g, g' \in G, \tag{2а}$$

где $c(g)$ — произвольная непрерывная функция, поскольку тогда соответствующие T_g и $T'_g = c(g)\,T_g$ имеют одинаковую фазу $\omega'(g, g')$. Кроме того, закон ассоциативности группового умножения налагает другое ограничение на систему фаз $\omega(g, g')$, а именно

$$\omega(g, g')\,\omega(gg', g'') = \omega(g', g'')\,\omega(g, g'g''). \tag{2б}$$

Отметим, что $\omega'(g, g')$, определенное в (2а), удовлетворяет (2б), если этому ограничению удовлетворяет $\omega(g, g')$.

Взяв весьма простые примеры, легко видеть, что равенство (2б) даже с точностью до определенной, согласно (2а), эквивалентности не определяет однозначно фазы $\omega(g, g')$, так что мы имеем в общем случае ряд новых неэквивалентных лучевых представлений для заданной группы G помимо обычных представлений с $\omega = 1$.

Пусть $g \to T_g$ — проективное представление группы G, $g \in G$, в H. Пусть v_i — компоненты некоторого $v \in H$ в некотором базисе. Луч может быть представлен величинами $\bar{v}_i \equiv v_i/v_l$, где v_l — любая из компонент вектора v, поскольку, очевидно, все векторы в луче $\{\lambda v\}$ индуцируют один и тот же v. Выбрав специальный вектор v с $v_1 = 1$, мы видим, что индуцированные посредством T преобразования на v имеют вид

$$\bar{v}'_1 = v_1,$$

$$\bar{v}'_i = \left[\sum_{k=2}^{\infty} D_{ik}(g)\,\bar{v}_k + D_{i1}(g)\right] \Big/ \left(\sum_{k=2}^{\infty} D_{1k}(g)\,\bar{v}_k + D_{11}(g)\right),$$

$$i = 2, 3, \ldots .$$

Эти преобразования нелинейны и называются *проективными преобразованиями*. Нетрудно проверить, что представления T_g и $c(g)\,T_g$, так же как и неэквивалентные лучевые представления $\omega(g, g') \neq 1$, индуцируют одно и то же проективное представление. Неоднозначность фазы в этой формулировке полностью исчезла, но она лишь стала скрытой, так как обратная задача отыскания всех неэквивалентных проективных представлений эквивалентна отысканию всех неэквивалентных фаз.

Проективные представления и центральное расширение

Остающаяся неоднозначность фаз мешает применению математической теории обычных представлений, когда $\omega(g, g') \neq 1$. В этом случае можно попытаться построить более широкую (или расширенную) группу $\mathscr{E}$, обычные представления которой дают *все* неэквивалентные лучевые представления (2) группы G. Это задача *подъема* проективных представлений группы G в обычные представления группы $\mathscr{E}$, и она может быть просто решена следующим образом. Пусть K — абелева группа, порождаемая умножением неэквивалентных фаз $\omega(x, y)$, удовлетворяющих (2б). Рассмотрим пары (ω, x), $\omega \in K$, $x \in G$. В частности, $K = \{(\omega, e)\}$ и $G = \{(e, x)\}$. Пары (ω, x) образуют группу с законом умножения типа полупрямого произведения:

$$(\omega_1, x_1)(\omega_2, x_2) = (\omega_1\omega(x_1, x_2)\,\omega_2, x_1x_2).$$

В данном случае мы можем в качестве (ω, x) принять ωx. Группа $\mathscr{E} = \{(\omega, x)\}$ называется *центральным расширением* группы G посредством группы K (гл. 21, § 4), и мы видим, что векторные представления группы $\mathscr{E}$ содержат все лучевые представления группы G. Таким образом, расширенную группу $\mathscr{E}$ можно рассматривать как правильную *квантовомеханическую группу*. Теория и приложения расширений групп рассматриваются в гл. 21. Здесь мы приведем лишь следующее утверждение.

Утверждение 2. *Конечномерные проективные представления односвязных непрерывных групп эквивалентны обычным представлениям.*

Доказательство. Сначала, не нарушая общности, возьмем детерминант от обеих частей равенства (2): $\det T(x) \det T(y) = \omega^n(x, y) \det T(x, y)$, где n — размерность представлений. Новое представление $T'(x) = T(x)/[\det T(x)]^{1/n}$ формально удовлетворяет соотношению $T'(x)\,T'(y) = T'(xy)$: имеются различные значения величины $[\det T]^{1/n}$, и мы можем перейти к эквивалентной системе фаз, такой, что $T'(x)\,T'(y) = \omega'(x, y)\,T'(xy)$ с $\omega'^n = 1$. Если групповое пространство односвязно, $[x']^{1/n}$ может быть определено однозначно и является одинаковым для

всех x ввиду непрерывности. Следовательно, мы приходим к обычным представлениям.

Аналогично, лучевые представления однопараметрических подгрупп Ли всегда эквивалентны обычным представлениям (гл. 21, § 4).

Во многих физических примерах, таких, как группа вращения, группы Лоренца и Пуанкаре, проективные представления группы могут быть сведены к истинно унитарным представлениям их универсальной накрывающей группы [38]. Заметным исключением является группа Галилея, где «квантовомеханическая группа» — это действительно одиннадцатипараметрическая группа, центральное расширение универсальной накрывающей группы Галилея. Случаи, когда центральное расширение не является необходимым, охватывает следующий критерий.

Критерий подъема. *Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли L. Предположим, что для всякой кососимметрической вещественнозначной билинейной формы $\theta(x, y)$ на L, удовлетворяющей*

$$\theta([x, y], z) + \theta([y, z], x) + \theta([z, x], y) = 0,$$

существует линейная форма f на L, такая, что

$$\theta(x, y) = f([x, y])$$

для всех x, y в L. Тогда каждое сильно непрерывное проективное представление группы G индуцируется сильно непрерывным унитарным представлением на соответствующем гильбертовом пространстве.

(Доказательство см. в [38] или [764].)

Замечание. Это условие часто выражают при помощи утверждения, что вторая группа когомологий $H^2(G, R)$ тривиальна (гл. 21, § 4).

Получаем следующий вывод. Группа симметрии G физической системы *индуцирует* представление T обратимых отображений пространства H на себя, которое является унитарным или антиунитарным и является представлением центрального расширения $\mathscr{E}$ группы G либо группы, накрывающей группу G. В унитарном случае мы доказали, что H является некоторым прямым интегралом неприводимых пространств представления T в силу теоремы Маутнера (теорема 5.6.1).

Непрерывность

Математическая теория представлений топологических групп требует предположения непрерывности представлений. Физи-

чески это означает непрерывность вероятностей $|(\varphi, T_g\psi)|^2$ как функции от g, т. е. когда мы сравниваем вероятности нахождения двух состояний $T_g\psi$ и $T_{g'}\psi$ в фиксированном состоянии φ.

Унитарные и антиунитарные операторы

Групповое свойство преобразований (2) и непрерывность позволяют определить унитарный или антиунитарный характер представления T группы симметрии G.

Если для всякого элемента g из G имеем

$$g = h^2,$$

где h — также элемент группы, то мы имеем

$$T_g = \omega(g) T_h^2,$$

где $\omega(g)$ — фазовый множитель.

Квадрат антиунитарного или унитарного оператора унитарен. Таким образом, T унитарно. Для компоненты единицы любой группы Ли G равенство (3) выполняется. Действительно, пусть $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа в G, такая, что $g(t_0) = g$. Тогда для $h = g(t_0/2)$ равенство (3) выполняется. Следовательно, связные группы Ли симметрии представляются унитарными операторами. Для антиунитарного случая (3) должно нарушаться. Если равенство (3) не выполняется, как в случае расширенной группы Пуанкаре с пространственными и временными отражениями, необходимы дальнейшие физические рассуждения, чтобы решить, унитарного или антиунитарного типа представление T.

Можно также видеть, что инвариантность относительно преобразования симметрии состояния, которое является суперпозицией двух стационарных состояний с различными энергиями, в момент времени t также исключает антиунитарное представление, так как тогда оператор, соответствующий второму решению в теореме Вигнера и обозначаемый через A, давал бы

$$A(\psi_1 \exp(-iE_1t) + \varphi_1 \exp(-iE_2t)) = \exp(iE_1t) A\psi_1 + \exp(iE_2t) A\varphi_1,$$

тогда как правильная эволюция состояния, получаемая из уравнения Шредингера, есть

$$\exp(-iE_1t) A\psi_1 + \exp(-iE_2t) A\varphi_1.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Симметрия, соответствующая «обращению направления движения» (обращению времени) должна представляться антиунитарными операторами A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольное состояние $\psi(t)$ можно представить в виде суперпозиции стационарных состояний ψ_n.

Состояние $\psi(t)$ и состояние с обращенным временем $(A\psi)(t)$ эволюционируют как

$$\psi(t) = \sum_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n, \quad (A\psi)(t) = \sum_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,A\psi_n.$$

Это последнее состояние должно быть также в силу инвариантности относительно обращения времени преобразованием состояния $\psi(-t)$, т. е.

$$A\psi(-t) = A\sum_n \exp(\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n.$$

Таким образом, A должен быть антиунитарным, чтобы оба состояния были одинаковыми.

В унитарном случае можно определить нормированный оператор T_g, такой, что $T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$. Тогда $T_{gg^{-1}} = \omega(g, g^{-1})\,I$ ввиду равенства (2). Для двух коммутирующих преобразований из (2) имеем

$$T_g T_{g'} = c(g, g')\,T_{g'} T_g, \quad c(g, g') = \frac{\omega(g', g)}{\omega(g, g')},$$

и находим, что $c(g, g') = +1$ только в том случае, если T_g и $T_{g'}$ также коммутируют. В общем случае, если коммутатор $T_g T_{g'} T_g^{-1} T_{g'}^{-1}$ (который не зависит от нормировок T_g и $T_{g'}$ и однозначно определяется через T_g и $T_{g'}$) кратен I, т. е. $C = gg'g^{-1}g'^{-1} = I$, тогда $T_C = c(g, g')\,I$. Множитель $c(g, g')$ является характеристикой только когерентного подпространства, т. е. он имеет единственное значение в каждом когерентном подпространстве. В частности, если $T_{g'}$ и T_g принадлежат одной и той же однопараметрической подгруппе, то $c(g, g') = 1$.

Правила суперотбора и симметрия

В § 1 мы видели, что векторы $\sum_n \alpha_n\psi_n$ и $\sum_n \alpha_n(\lambda_n\psi_n)$ принадлежат различным лучам (состояниям), хотя ψ_n и $\lambda_n\psi_n$ принадлежат одному и тому же лучу. Но если преобразование физической симметрии системы переводит ψ_n в $\lambda_n\psi_n$, то, поскольку состояние системы не изменилось, суперпозиция вида $\sum_n \alpha_n\psi_n$ невозможна без выполнения равенства $\lambda_n = 1$. Относительная фаза λ_n между векторами в различных когерентных секторах не является наблюдаемой, поскольку физика не изменилась от преобразования симметрии. Если это так, никакое физическое измерение не сможет отличить состояние $\sum_n \alpha_n\psi_n$ от состояния $\sum_n \alpha_n(\lambda_n\psi_n)$. Таким образом, чтобы показать существование правила суперотбора, нам нужно иметь преобразование симметрии (физический постулат) и векторы ψ_n, которые переходят в $\lambda_n\psi_n$ при этом преобразовании

и которые представляют собой собственные состояния измеримой физической величины, например заряда.

Пример 1. *Вращательная инвариантность и правило суперотбора фермионов.* Рассмотрим для конкретности состояние $\psi_1 = \left|\frac{j}{2}, m\right\rangle$, принадлежащее представлению $D^{j/2}$ группы вращений SO(3), и состояние $\psi_2 = |j, m'\rangle$, принадлежащее представлению D^j, j — целое. Рассмотрим вращение $\hat{n}\omega$ на угол ω в направлении $\hat{n}$. Состояния преобразуются по формуле

$$|JM\rangle' = D^J_{M', M}(\hat{n}\omega)|JM'\rangle.$$

Из упражнения 5.8.3.1 следует, что матрицы D^J удовлетворяют условию

$$D^J(\hat{n}\omega + 2\pi n) = (-1)^{2nJ} D^J(\hat{n}\omega).$$

Значит, для вращения $\hat{n}_y 2\pi$, $\hat{n}_y = (0, 1, 0)$ мы, в частности, имеем

$$|JM\rangle' = D^J_{M', M}(\hat{n}_y 2\pi)\,|JM'\rangle = (-1)^{2J}\,|JM\rangle.$$

Таким образом, получаем лишнюю относительную фазу $(-1)^{2J}$ в линейной комбинации двух состояний ψ_1 и ψ_2. Следовательно, если выполняется вращательная инвариантность, то в соответствии с нашими предыдущими рассуждениями имеет место правило суперотбора между состояниями с целочисленными J и состояниями с полуцелочисленными значениями J; в физически реализуемых состояниях они не могут смешиваться.

Пример 2. *Группа* SU(2) *изоспина и правила суперотбора.* Дадим здесь пример приближенной группы симметрии. В гл. 7, § 4, В, упоминалось, что частицы одинакового спина и четности и приблизительно равных масс с сильными взаимодействиями могут быть сгруппированы в мультиплеты, соответствующие неприводимым представлениям группы SU(2) (аналогично спину). Соответствующие новые квантовые числа I и I_3 называются *изоспином*.

Если бы группа $SU(2)_I$, описывающая изоспиновые мультиплеты частиц, была группой точной симметрии природы таким же образом как группа спина SU(2), то в соответствии с выводом в примере 1 должно было существовать правило суперотбора между состояниями с целыми и полуцелыми значениями I-спина. Так для сильных взаимодействий, которые не зависят от электрического заряда, $SU(2)_I$ является хорошей группой симметрии. Это означает, что нет *чистых* состояний вида $|I = 1\rangle + |I = 1/2\rangle$

{например, $|\Sigma\rangle + |\Lambda\rangle$}[1]). Существуют, однако, чистые состояния вида $|I = 1/2\rangle + |I = 1/2\rangle$, например $|n\rangle + |p\rangle$, для одних только сильных взаимодействий. Но эти суперпозиции нарушают правило суперотбора для заряда (см. пример 3 ниже); следовательно, *для одних сильных взаимодействий* не существует правила суперотбора для заряда. В присутствии электромагнитных и слабых взаимодействий $SU(2)_I$ не является группой симметрии, но в этом случае правило суперотбора для заряда выполняется точно; теперь существует чистое состояние $|\Sigma^0\rangle + |\Lambda^0\rangle$, но не существует состояния $|n\rangle + |p\rangle$. Действительно, вращение из SU(2), переводя n в p, не оставляет систему без изменения, а соответствует процессу слабого взаимодействия: $n \to p + e + \bar{\nu}$.

Аналогично, если бы гипотетическое «сверхслабое взаимодействие» нарушало вращательную инвариантность, то мы могли бы иметь чистые состояния вида $|j = 1/2\rangle + |j = 0\rangle$, например $|N\rangle + |\pi\rangle$.

Пример 3. *Правила суперотбора для калибровочных групп.* Два эквивалентных описания, получаемых одно из другого при помощи коммутативной однопараметрической непрерывной группы (не связанной очевидным образом с пространственно-временными преобразованиями) предполагают существование аддитивного квантового числа a, и собственные состояния преобразуются как

$$|q'\rangle = \exp(i\lambda q)\,|q\rangle.$$

Для двух состояний с различными значениями q, например $+1$ и -1, получаем две различные фазы $\exp(i\lambda)$ и $\exp(-i\lambda)$, следовательно правило суперотбора для q. *Физической* основой всех таких правил суперотбора, как, например, электрический заряд, барионное число, лептонное число, является, повторяем, требование, чтобы умножение всех состояний на $\exp(i\lambda q)$ не вызывало наблюдаемого изменения в системе, следовательно, эквивалентные описания и калибровочные группы.

Вместо чистых состояний можно образовать *смешанные* состояния из векторов различных когерентных подпространств. Однако мы здесь этим заниматься не будем.

Правила суперотбора в случае четности и других групповых расширений

Внутри когерентного подпространства четность каждого состояния (по отношению к одному из них) хорошо определена. Действительно, используем лучевые представления полной орто-

[1]) Через $|n\rangle$, $|p\rangle$, $|\Lambda\rangle$, $|\Sigma\rangle$, $|\pi\rangle$, ... обозначают состояния частиц с определенными значениями изотопического спина I, т. е. нейтрон, протон, λ-частицу сигма-частицу, пион и т. д.

гональной группы O(3), или полной группы Лоренца, включая отражения. В этом случае четность определяется либо в том же пространстве представления, что и SO(3) (или собственная однородная группа Лоренца), либо в удвоенном гильбертовом пространстве. Таким образом, относительные четности хорошо определены, например, для уровней атома водорода и для пары частица — античастица в теории Дирака. Однако для состояний в различных когерентных подпространствах относительная четность не определена, поскольку мы не можем взять линейную комбинацию двух таких состояний и увидеть, как она преобразуется относительно четности.

Аналогичные рассуждения применяются к другим групповым расширениям, например, при помощи зарядового сопряжения.

Расширение группы SU(2) изотопического спина посредством оператора отражения предполагает удвоение состояний с $I = n/2$, но не обязательно состояний с $I = n$ (n целое). Это расширение осуществляется посредством зарядового сопряжения C или изоспиновой четности $G = Ce^{i\pi}$, называемой также G-четностью (использование C или G соответственно отвечает в группе вращения для спина использованию оператора отражения Σ или четности P; G коммутирует со всеми изоспиновыми вращениями, так же как P коммутирует со всеми пространственными вращениями). G указывает нам, имеем ли мы дело с полярными или с аксиальными векторами в I-пространстве (например, π-мезон является полярным вектором). Таким образом, удвоение при помощи G приводит нас к античастицам. Следовательно, среди других имеем тот результат, что мультиплеты бозонов с $I = n/2$ не могут содержать античастицы; последние должны лежать в другой половине двойного пространства. В пределе точной $SU(2)_I$ относительная G-четность (изоспиновая четность) между мультиплетами $I = n/2$ и $I = n$ не определена; не определена она и между состояниями с различными зарядами или барионными числами. Но она определена, например, между ($I = 1$)-мультиплетом (π) и двумя ($I = {}^1/_2$)-мультиплетами с $N = 0$ (например, $N\bar{N}$) (гл. 21, § 4).

Другой пример правила суперотбора — массовое правило суперотбора в нерелятивистской квантовой механике, см. в § 4.

§ 3. Симметрии физических систем

Понятие симметрии связано со следующими положениями, которые все являются различными выражениями одного и того же фундаментального явления.

1. Невозможно узнать или измерить некоторые величины, например абсолютные координаты, направления, абсолютное левое или правое.