лютными аддитивными квантовыми числами, такими, как заряд Q, барионное число B, лептонное число L (и $\tilde{L}$ — мюонное лептонное число). Все они в свою очередь могут быть представлены как генераторы однопараметрических групп преобразований (абелевых калибровочных групп).

В табл. 1 дана сводка принципов симметрии в физике. Группы приближенных симметрий и динамические группы рассматриваются в следующей главе.

Таблица 1

Физические симметрии и динамические группы

	Сохраняющиеся генераторы или физический смысл
А. Группы геометрической симметрии	
Трансляции	P_μ
Вращения	J_i
Преобразования Лоренца или Галилея	N_i
Четность P	P
Обращение времени T	Антиунитарный оператор
Б. Группа масштабных преобразований	
Дилатации	D
Специальные конформные преобразования	K_μ
В. Негеометрические симметрии	
Тождественные частицы	Типы симметрии волновых функций
Калибровочные группы (неизмеримость относительных фаз)	Заряд Q Барионное число B Лептонные числа L C
Сопряжение частица—античастица	
Г. Общая ковариантность	Принцип эквивалентности Уравнения движения источников и полей
Д. Приближенные динамические симметрии, например SU(2), SU(3), SU(6), O(4)	Мультиплеты
Е. Динамические группы O(3, 1), O(4, 2)	Бесконечные мультиплеты
Ж. Группы диффеоморфизмов	
Бесконечнопараметрические группы	Геометризация динамик

§ 4. Динамические симметрии релятивистских и нерелятивистских систем [1])

Согласно нашему обсуждению в § 2, динамическая задача в квантовой теории сводится к явному построению конкретного линейного пространства, идентификации состояний и обозначению их при помощи физических наблюдаемых с целью вычисления вероят-

[1]) Подробный обзор по динамическим симметриям в физике можно найти в статье [885]. — *Прим. перев.*

ностей переходов. Кинематические симметрии, такие, как Пуанкаре- или конформная инвариантность, позволяют нам характеризовать эти состояния посредством глобальных квантовых чисел, например полного импульса и момента импульса. Следовательно, чтобы, с одной стороны, обеспечить релятивистскую инвариантность, а с другой — отчасти определить конкретное линейное пространство, следует всегда определить, какие классы представлений группы симметрии реализуются для заданной квантовой системы. Для нерелятивистских задач пуанкаре-инвариантность переходит в галилееву инвариантность (см. гл. 1, § 8 относительно контракции алгебры Ли группы Пуанкаре в галилееву алгебру Ли). Как мы увидим, однако, даже для нерелятивистских задач оказывается более удобным исходить из конформной инвариантности.

Начнем с 15-параметрической конформной группы пространства Минковского, изоморфной введенной в § 3 группе SO (4, 2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Базисные элементы алгебры Ли конформной группы в пространстве скалярных функций на пространстве Минковского представляются следующими дифференциальными операторами:*

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \\ P_\mu &= \partial_\mu, \\ K_\mu &= 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu, \\ D &= x^\nu \partial_\nu, \end{aligned} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $M_{\mu\nu}$, P_μ — базисные элементы подалгебры Пуанкаре, K_μ — генераторы так называемых специальных конформных преобразований, а D генерирует дилатации.

Доказательство следует из определения конформной группы, которое дано в (3.3), (3.4).

Модификации для случаев спинорных или векторнозначных функций легко могут быть найдены (упражнение 4.1).

Замечание. Строго говоря, конформная группа не является хорошо определенной глобально в пространстве Минковского. Для правильного определения требуется компактифицированная форма пространства Минковского. Однако что касается свойств алгебры Ли, то для них пространство Минковского может использоваться без затруднений.

Коммутационные соотношения конформной алгебры Ли легко получаются из (1) и совпадают с коммутационными соотношениями алгебры Ли Пуанкаре плюс следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= g_{\nu\lambda} K_\mu - g_{\mu\lambda} K_\nu, \\ [M_{\mu\nu}, D] &= 0, \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2(g_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, D] &= P_\mu, \\
[K_\mu, K_\nu] &= 0, \\
[K_\mu, D] &= -K_\mu.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Важное с физической точки зрения свойство конформной группы заключено в следующем наблюдении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Релятивистские волновые уравнения для безмассовых частиц спина* 0 *и спина* $^1/_2$ *инвариантны относительно конформной группы пространства Минковского.*

Утверждение означает, что если

$$W\varphi = 0 \tag{3}$$

есть волновое уравнение, то генераторы L_i *конформной алгебры Ли можно реализовать на пространстве решений таким образом, что, в общем случае*

$$[W, L_i] = \lambda W. \tag{4}$$

Следовательно, L_i, *действуя на пространстве решений волнового уравнения, переводит одно решение в другое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала уравнение для бесспиновой безмассовой частицы, т. е. обычное волновое уравнение

$$\Box\varphi \equiv (\partial_t^2 - \partial_i\partial_i)\,\varphi = 0. \tag{5}$$

Легко проверить, что для K_μ и D, заданных согласно (1), справедливо

$$
\begin{aligned}
[\Box, K_\mu] &= 4x_\mu\Box, \\
[\Box, D] &= 2\Box.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Волновое уравнение для частиц спина $^1/_2$ может быть рассмотрено аналогично (упражнение 6.4.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Волновые уравнения для массивных частиц, например*

$$(\Box - m^2c^2/\hbar^2)\,\varphi = 0, \tag{7}$$

являются формально инвариантными относительно конформной группы при условии, что масса m *преобразуется следующим образом:*

относительно дилатаций

$$m^2 \to e^{2\alpha}m^2, \tag{8}$$

относительно специальных конформных преобразований

$$m^2 \to \sigma(x)^2\, m^2, \qquad \sigma(x) = 1 + 2c^\mu x_\mu + c^2x^2,$$

или же альтернативно, m^2 *рассматривается как оператор, имеющий такие же коммутационные соотношения, как и* $\Box$ *в* (6).

Доказательство проводится прямым вычислением и является непосредственным.

Замечание. Инвариантность в утверждении 3 не является симметрией в обычном смысле для отдельной заданной частицы массы m, поскольку она связывает состояния частиц массы m с состояниями другой частицы массы m'. Однако преобразования (8) имеют некоторые важные физические применения. Кроме того, если конформная симметрия интерпретируется как изменение масштаба (§ 3), соотношение (8) можно интерпретировать как изменение за счет размерности массы.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел волнового уравнения (7). В этом пределе энергия измеряется после исключения массы покоя. Следовательно, полагаем

$$\partial_0 \to mc + \frac{1}{c}\partial_t. \tag{9}$$

Тогда генераторы конформной группы принимают вид

$$\begin{aligned}
P_0 &= mc + \frac{1}{c}\partial_t,\\
P_i &= \partial_i\\
M_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i,\\
M_{0i} &= c(t\partial_i - mx_i) - \frac{1}{c}x_i\partial_t,\\
D &= c^2mt + (t\partial_t - x_k\partial_k),\\
K_0 &= c^3mt^2 + c(t^2\partial_t - 2tx_k\partial_k + m\boldsymbol{x}^2) + \frac{1}{c}\boldsymbol{x}^2\partial_t,\\
K_i &= c^2(2x_imt - t^2\partial_i) + (2x_it\partial_i - 2x_ix_k\partial_k + \boldsymbol{x}^2\partial_i).
\end{aligned} \tag{10}$$

В то же время волновой оператор становится равным

$$\Box - m^2c^2 \to (2m\partial_t - \partial_i\partial_i) + \frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t, \tag{11}$$

т. е. равным оператору Шредингера плюс добавочное слагаемое порядка $1/c^2$.

Утверждение 4. *Операторы*

$$\begin{aligned}
\overline{P}_0 &= \partial_t,\\
P_i &= \partial_i,\\
M_{ij} &= x_i\partial_j - x_j\partial_i,\\
\overline{M}_{0i} &= (t\partial_i - mx_i)
\end{aligned} \tag{12}$$

коммутируют с оператором Шредингера $S = (2m\partial_t - \partial_i\partial_i)$ *и генерируют алгебру Ли группы Галилея (гл. 1, § 8), за исключением следующего коммутатора*

$$[P_i, \overline{M}_{0j}] = -m\delta_{ij}, \tag{13}$$

для которого правая часть равнялась нулю в чисто геометрическом определении группы Галилея.

Доказательство этого и последующих утверждений также проводится непосредственным вычислением и предоставляется читателю.

Отмеченное в утверждении 4 различие обусловлено заменой (9) и выражает тот факт, что масса m действительно является оператором, коммутирующим со всеми десятью генераторами группы Галилея. Таким образом, решения уравнения Шредингера реализуют несколько иное представление группы Галилея, а именно проективное представление, заданное при помощи (12). Эквивалентно мы может сказать, что соотношения (12) являются расширением галилеевой алгебры Ли, или ее квантовомеханическим представлением (гл. 21, § 4).

Действительно, при переходе к глобальной форме представления (12) мы получаем пример представления с точностью до множителя, обсуждавшийся в § 2, и пример правила суперотбора.

Правило суперотбора масс (Баргманн). *Для двух элементов группы Галилея*

$$g = (b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R), \quad g' = (b', \boldsymbol{a}', \boldsymbol{v}', R')$$

мы имеем глобальное представление

$$U(g')\,U(g) = \omega(g', g)\,U(g'g), \tag{14}$$

где фаза $\omega(g', g)$ *дана согласно*

$$\omega(g', g) = \exp\left[\mathrm{i}\,\frac{m}{2}(\boldsymbol{a}'\cdot R'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\cdot R\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{v}'\cdot R'\boldsymbol{v}\right]. \tag{14'}$$

Это правило суперотбора обусловлено тем, что следующий *тождественный* элемент группы

$$(0, 0, -\boldsymbol{v}, I)(0, -\boldsymbol{a}, 0, I)(0, 0, \boldsymbol{v}, 1)(0, \boldsymbol{a}, 0, I) = (0, 0, 0, I)$$

представляется не посредством $U = I$, а фазовым множителем

$$\exp(-\mathrm{i}m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{15}$$

Следовательно, суперпозиция двух состояний с различными массами m_1 и m_2 преобразуется в

$$\psi(m_1) + \psi(m_2) \to \exp(-\mathrm{i}m_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\psi(m_1) + \exp(-\mathrm{i}m_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\psi(m_2). \tag{16}$$

Это означает, что относительная фаза ненаблюдаема, а следовательно, в соответствии с нашим общим рассмотрением суперпозиция $|m_1\rangle + |m_2\rangle$ не является реализуемым состоянием.

Утверждение 5. *Оператор Шредингера* $S = (2m\partial_t - \partial_i\partial_i$ *инвариантен также относительно модифицированного оператора дилатации* $\tilde{D}$ *и модифицированного специального конформного преобразования с генератором* $\tilde{K}_0$ (17), *которые вместе с галилеевой алгеброй Ли образуют 12-параметрическую алгебру Ли, называемую алгеброй Ли Шредингера.*

Модификация нужна, поскольку, как мы видели, операторы D и K_0 как инвариантные операторы волнового оператора ($\Box - m^2c^2$) преобразуют также массу m. Но в оператор Шредингера ($2m\partial_t - \partial_i\partial_i$) масса m входит как множитель перед ∂_t. Следовательно, если мы желаем определить инвариантность оператора Шредингера при фиксированной m, мы может перенести свойство трансформации m на ∂_t или на $\partial_i\partial_i$. Этот процесс немедленно дает следующие выражения для модифицированных генераторов:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= 2t\partial_t + x_k\partial_k + 3/2, \\ \tilde{K}_0 &= t^2\partial_t + tx_k\partial_k + \frac{3}{2}t - \frac{m}{2}x^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Утверждение 6. *Генераторы группы Шредингера в импульсном пространстве* (в картине Шредингера квантовой механики) представляются в виде

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2m}p^2, \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{M} &= -t\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{q}, \\ \tilde{D} &= \frac{t}{m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}), \\ \tilde{K}_0 &= -\frac{t^2}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}t(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}) - \frac{m}{2}\boldsymbol{q}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Утверждение 7. *Все генераторы в предыдущем утверждении, включая и зависящие от времени, удовлетворяют уравнению*

$$[H_0, L_A] + \frac{\partial L_A}{\partial t} \equiv \dot{L}_A = 0, \tag{19}$$

а явная зависимость их от времени дается согласно

$$L_A(t) = \exp(-\mathrm{i}tH_0)\, L_A(0) \exp(\mathrm{i}tH_0). \tag{20}$$

В частности, не зависящие от времени генераторы коммутируют с гамильтонианом и генерируют то, что принято называть группой вырождения гамильтониана. Все операторы, удовлетворяющие (19), генерируют группу симметрии в широком смысле, но не га-

мильтониана, а зависящего от времени оператора $(i\partial_t - H)$, следовательно, и *самой* квантовомеханической системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Группа Шредингера содержит в качестве подгруппы динамическую группу* SU (1, 1), *порождаемую посредством* $\tilde{D}$, $\tilde{K}_0$, H, *или*

$$L_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{K}_0 + H_0),$$
$$L_2(t) = -\frac{1}{2}D, \tag{21}$$
$$L_3(t) = -\frac{1}{2}(\tilde{K}_0 - H_0).$$

Здесь L_3 — *компактный генератор группы* SU (1, 1) *с дискретным спектром.*

В частности, алгеброй при $t = 0$ *является*

$$L_1(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}q^2\right),$$
$$L_2(0) = -\frac{1}{2}(p\cdot q + q\cdot p), \tag{22}$$
$$L_3(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}q^2\right).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Алгебра Ли* (22) *утверждения 8 решает динамическую задачу для трехмерного квантового осциллятора с гамильтонианом*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^2 \tag{23}$$

и для свободной частицы с гамильтонианом $H = L_1 - L_3 = \frac{p^2}{2m}$.

Доказательство состоит в наблюдении, что в подходящих единицах гамильтониан (23) совпадает с компактным генератором алгебры su (1, 1) (22). Оператор Казимира

$$C_2 = L_3^2 - L_1^2 - L_2^2$$

может быть вычислен в представлении (22):

$$C_2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}) - \frac{3}{16}.$$

Таким образом, мы знаем представление алгебры Ли и, значит, спектр оператора H, а также состояния осциллятора.

Замечание. Отметим, что свободная частица и квантовомеханический осциллятор реализуются на одном и том же пространстве представления группы SU (1, 1). Различие в том, что собственные состояния энергии получаются при помощи диагонализации компактного генератора L_3 в случае осциллятора и некомпактного

генератора (L_1 — L_3) в случае свободной частицы. Последний оператор имеет, конечно же, непрерывный спектр. Но даже для свободной частицы существует оператор с дискретным спектром. Этот факт иллюстрирует важный момент в квантовой теории: в квантовой теории существенна физическая идентификация элементов алгебры Ли; мы используем не абстрактные группы, но предпочтительно группы с определенными идентификациями.

§ 5. Комментарии и дополнения

Исторические замечания

Квантовая теория, разработанная Гейзенбергом, Шредингером, Дираком, Паули, Борном, Йорданом и другими, своей первой математической формулировкой обязана фон Нейману, который дал аксиоматическую формулировку гильбертова пространства и доказал единственность и эквивалентность формализмов Гейзенберга и Шредингера. Эта эквивалентность была доказана также Паули и Ланчосом. Начало применению представлений групп в квантовой теории положил Вигнер. Формулировка релятивистской инвариантности в квантовой теории принадлежит Дираку и Вигнеру; последний впервые провел полное рассмотрение представлений группы Пуанкаре [852]. Теоретико-групповое обсуждение волновых уравнений принадлежит Баргманну и Вигнеру [45] (гл. 16—21).

Понятие правил суперотбора было введено Виком, Вайтманом и Вигнером [847]. Представления групп симметрии унитарными или антиунитарными операторами в гильбертовом пространстве (теорема Вигнера) были разработаны Вигнером, Баргманном [41], а также в более общем виде в работах Эмха и Пиррона [249] и Ульхорна [815].

Инвариантность классических уравнений Максвелла относительно конформной группы восходит к Бейтмену [98] и Каннингэму [201]. Теория конформно инвариантных волновых уравнений восходит к Дираку [210]. Динамические группы были введены Барутом [46].

§ 6. Упражнения

§ 3.1. Покажите, что дилатации и нелинейные специальные конформные преобразования (3.3), (3.4) могут быть записаны в виде линейных преобразований в шестимерном пространстве

$$D_1: \qquad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu}, \quad k' = \rho^{-1}k, \quad \lambda' = \rho\lambda,$$

$$C_4: \qquad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu} + c^{\mu}\lambda,$$

$$k' = -2c_{\nu}\eta^{\nu} + k + c^2\lambda,$$

$$\lambda' = \lambda,$$