генератора (L_1 — L_3) в случае свободной частицы. Последний оператор имеет, конечно же, непрерывный спектр. Но даже для свободной частицы существует оператор с дискретным спектром. Этот факт иллюстрирует важный момент в квантовой теории: в квантовой теории существенна физическая идентификация элементов алгебры Ли; мы используем не абстрактные группы, но предпочтительно группы с определенными идентификациями.

§ 5. Комментарии и дополнения

Исторические замечания

Квантовая теория, разработанная Гейзенбергом, Шредингером, Дираком, Паули, Борном, Йорданом и другими, своей первой математической формулировкой обязана фон Нейману, который дал аксиоматическую формулировку гильбертова пространства и доказал единственность и эквивалентность формализмов Гейзенберга и Шредингера. Эта эквивалентность была доказана также Паули и Ланчосом. Начало применению представлений групп в квантовой теории положил Вигнер. Формулировка релятивистской инвариантности в квантовой теории принадлежит Дираку и Вигнеру; последний впервые провел полное рассмотрение представлений группы Пуанкаре [852]. Теоретико-групповое обсуждение волновых уравнений принадлежит Баргманну и Вигнеру [45] (гл. 16—21).

Понятие правил суперотбора было введено Виком, Вайтманом и Вигнером [847]. Представления групп симметрии унитарными или антиунитарными операторами в гильбертовом пространстве (теорема Вигнера) были разработаны Вигнером, Баргманном [41], а также в более общем виде в работах Эмха и Пиррона [249] и Ульхорна [815].

Инвариантность классических уравнений Максвелла относительно конформной группы восходит к Бейтмену [98] и Каннингэму [201]. Теория конформно инвариантных волновых уравнений восходит к Дираку [210]. Динамические группы были введены Барутом [46].

§ 6. Упражнения

§ 3.1. Покажите, что дилатации и нелинейные специальные конформные преобразования (3.3), (3.4) могут быть записаны в виде линейных преобразований в шестимерном пространстве

$$
\begin{aligned}
D_1\colon &\quad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu}, \quad k' = \rho^{-1}k, \quad \lambda' = \rho\lambda, \\
C_4\colon &\quad \eta'^{\mu} = \eta^{\mu} + c^{\mu}\lambda, \\
&\quad k' = -2c_{\nu}\eta^{\nu} + k + c^2\lambda, \\
&\quad \lambda' = \lambda,
\end{aligned}
$$

где $\eta^\mu = kx^\mu$, k и $\lambda = kx^2$ взяты в качестве шести новых координат.

§ 3.2. Покажите, что уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(x) = \rho(x),$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(x) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} = \frac{1}{c}\rho(x)\,\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(x) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}(x)}{\partial t} = 0,$$

где $x = (t, \boldsymbol{x})$, не являются инвариантными относительно преобразований Галилея

$$t' = t,$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t.$$

§ 3.3. Покажите, что в пространстве Минковского M^2 (с одной пространственной и одной временной размерностями) группа причинности гораздо шире, чем $T^{1,1} \rtimes (\mathrm{SO}(1,1) \otimes D)$. В частности, разрешены нелинейные преобразования, отображающие прямые линии пространства-времени в кривые линии.

§ 3.4. На пространстве Минковского M^4 определим соотношение xLy, если $(x - y)$ — ориентированный светоподобный вектор: $x^0 > y^0$, $(x - y)^2 = 0$. Пусть φ: $M \to M$ — взаимно-однозначное отображение. Покажите, что φ сохраняет частичное упорядочение $x > y$ тогда и только тогда, когда оно сохраняет соотношение xLy. Заметим, что соотношение xLy не является частичным упорядочением, так как оно не транзитивно. Покажите также, что причинный автоморфизм отображает световые лучи в световые лучи.

§ 4.1. Покажите, что для частицы Дирака генераторы конформной группы [соответствующие формулам (4.1)] равны

$$M_{\mu\nu} = \overset{\circ}{M}_{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu, \quad \mu < \nu,$$

$$P_\mu = \overset{\circ}{P}_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 + \gamma_5),$$

$$K_\mu = \overset{\circ}{K}_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 - \gamma_5),$$

$$D = \overset{\circ}{D} - \frac{1}{2}\gamma_5,$$

где $\overset{\circ}{M}_{\mu\nu}$, $\overset{\circ}{P}$, ... заданы в (4.1).

§ 4.2. Волновой оператор для безмассовой частицы Дирака равен $\gamma^\mu\partial_\mu$. Покажите, что волновое уравнение $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ инвариантно относительно конформных преобразований в смысле равенства (4.4), пользуясь представлением, которое дано в предыдущем упражнении.

§ 4.3. Рассмотрите конформную группу в двумерном пространстве-времени M^2.

§ 4.4. Покажите конформную инвариантность безмассовых волновых уравнений для спина 1, фактически всех безмассовых волновых уравнений.

§ 4.5. Пусть M^n, $n = 2, 3, \ldots$ — пространство Минковского. Покажите, что конформная инвариантность сводит член взаимодействия $F(\varphi)$ нелинейного релятивистского уравнения

$$\Box\varphi = F(\varphi)$$

к виду $F(\varphi) = \lambda\varphi^{(n+2)/(n-2)}$. Отметим, что получаемое в итоге взаимодействие является на вторично квантованном уровне перенормируемым, но не суперперенормируемым.

§ 4.6. Выведите аналогичный результат для нелинейного уравнения Дирака

$$\partial_\mu \gamma^\mu \psi = F(\bar{\psi}, \psi).$$