Глава 14

Гармонический анализ на группах Ли. Специальные функции и представления групп

Кроме существенной роли теории представлений групп в формулировке основных уравнений физики следует упомянуть также важный метод *гармонического анализа* в решении динамических задач.

Во многих физических задачах мы имеем дело с функциями на однородных или симметрических пространствах, в частности на групповых пространствах. Например, функции на так называемом массовом гиперболоиде в импульсном пространстве $\varphi(p_\mu)$, $p_\mu^2 = m^2$. Аргументом в этом случае является элемент однородного пространства SO (3, 1)/SO (3). Эти функции могут быть разложены по множеству собственных функций операторов Казимира. Такие разложения очень важны и имеют физическую интерпретацию. Они также составляют основу для аппроксимаций, если в подходящих случаях важны только несколько членов разложения. Разложения в терминах специальных функций математической физики могут быть переформулированы в терминах гармонического анализа на однородных пространствах. Эти задачи подробно рассматриваются в гл. 14 и 15.

Пусть G — унимодулярная группа Ли с мерой Хаара μ, и пусть $H = L^2(G, \mu)$. Мы ограничиваем наш анализ только группами типа I. Основной целью гармонического анализа на H является решение следующих задач.

1. Определение базиса[1]) $\{e_k(\lambda, g)\}$ в H и плотного подпространства $\Phi \subset H$, такого, что если обобщенное преобразование Фурье функции $\varphi \in \Phi$ задается формулой

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = (\varphi, e_k(\lambda)), \tag{1}$$

то формула спектрального синтеза для φ имеет вид

$$\varphi(g) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_k \hat{\varphi}_k(\lambda) e_k(\lambda, g). \tag{2}$$

---

[1]) Мы предполагаем, что индекс λ соответствует множеству собственных значений инвариантных операторов группы G, а k соответствует множеству собственных значений остальных операторов, которые вместе с инвариантными операторами образуют максимальное множество коммутирующих операторов в H. Для удобства мы используем это обозначение, как если бы $\{\lambda\}$ было непрерывным множеством, а $\{k\}$ — дискретным. Однако в общем случае оба множества могут быть дискретными, непрерывными или смешанными.

2. Установление равенства Планшереля [1])

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Lambda} d\rho(\lambda) \sum_{k} \hat{\varphi}_k(\lambda) \overline{\hat{\psi}_k(\lambda)}. \tag{3}$$

3. Явное построение меры $d\rho(\lambda)$ (меры Планшереля).

Основная трудность в гармоническом анализе на группах Ли связана с тем фактом, что в большинстве случаев максимальное множество коммутирующих операторов в H, которое определяет базис $e_k(\lambda, g)$, содержит неограниченные операторы с непрерывными спектрами, и поэтому собственные векторы $e_k(\lambda, g)$ являются распределениями. Следовательно, чтобы дать подходящую интерпретацию функциям $e_k(\lambda, g)$ и разложению (2) по собственным функциям, нужно использовать так называемый *триплет Гельфанда* $\Phi \subset H \subset \Phi'$, а не гильбертово пространство H. В этом триплете Φ — определенное ядерное пространство гладких функций, плотное в H, а Φ' — дуальное пространство к Φ. Следовательно, естественная формулировка гармонического анализа на группах Ли состоит в использовании ядерной спектральной теории. Эта теория позволяет ясно и изящно формулировать гармонический анализ на группах. В то же время теория дает обобщение классического анализа Фурье, и полезна для приложений в квантовой физике, где понятия собственных функций и разложений по собственным функциям играют центральную роль.

§ 1. Гармонический анализ на абелевых и компактных группах Ли

Дадим сначала распространение обычного анализа Фурье на R^n на произвольную абелеву группу Ли.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная абелева группа Ли, и пусть $H = L^2(G, \mu)$, где μ — мера Хаара на G. Пусть $g \to T_g$ — регулярное представление группы G в H, заданное формулой*

$$T_g u(\tilde{g}) = u(\tilde{g} + g). \tag{1}$$

Тогда

1. *Существует обобщенное преобразование Фурье, такое, что*

$$\begin{aligned} F: \quad & H \to FH \equiv \hat{H} = \int_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \\ F: \quad & T_g \to FT_gF^{-1} \equiv \hat{T}_g = \int_{\Lambda} \hat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Мы следуем соглашению, принятому в математической литературе, и обозначаем скалярное произведение так, что оно линейно по первому множителю и антилинейно по второму.

где $\widehat{H}(\lambda)$ *и* $\widehat{T}_g(\lambda)$ относительно ρ *почти всюду неприводимы и* $\dim \widehat{H}(\lambda) = 1$. *Спектр* Λ *совпадает с группой характеров* $\widehat{G}$ *для* G.

2. *Существует триплет Гельфанда* $\Phi \subset H \subset \Phi'$ *и базис* $e(\lambda, g)$ *в* $\widehat{H}(\lambda)$, *такие, что для каждого элемента* X *из обертывающей алгебры* E *для почти всех* λ *относительно* ρ *имеем* [1])

$$\langle \overline{T(X)}\varphi, e(\lambda)\rangle = \widehat{X}(\lambda)\langle \varphi, e(\lambda)\rangle, \tag{3}$$

где $\widehat{X}(\lambda)$ — *вещественное число. Базисные элементы* $e(\lambda, g)$ *являются регулярными функциями на* G.

3. *Формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(g) = \int d\rho(\lambda)\widehat{\varphi}(\lambda)e(\lambda, g), \quad \varphi \in \Phi, \tag{4}$$

где

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(g)\overline{e(\lambda, g)}\,d\mu(g), \quad \widehat{\varphi}(\lambda) \in \widehat{H}(\lambda). \tag{5}$$

4. *Для* $\varphi, \psi \in \Phi$ *равенство Планшереля имеет вид*

$$\int_G \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,d\mu(g) = \int_\Lambda \widehat{\varphi}(\lambda)\overline{\widehat{\psi}(\lambda)}\,d\rho(\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. 1. Абелева группа Ли принадлежит к типу I. Поэтому разложение (2) следует из теоремы 5.6.3. В силу утверждения 6.1.1 каждая неприводимая компонента $\widehat{T}_g(\lambda)$ одномерна.

2—4. Пусть $D_G \subset H$ — область Гординга для обертывающей алгебры E группы G. Поскольку эллиптический оператор $T(\Delta) = \sum_{i=1}^{\dim G} T(X_i)^2$ коммутирует со всеми элементами $T(X)$, $X \in E$, то в силу теоремы 11.2.3 замыкание $\overline{T(X)}$ представителя $T(X)$ симметрического элемента $X^+ = X \in E$ является самосопряженным оператором. В силу теоремы 11.5.3 все операторы $\overline{T(X)}$, $X \in E$, попарно коммутируют и также коммутируют со всеми T_g, $g \in G$. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\dim G}$ — базис в алгебре Ли L группы G. Тогда самосопряженные операторы $\overline{T(X_i)}$ дают максимальное множество коммутирующих операторов в H и эллиптический оператор Нельсона $T(\Delta)$ также диагонален. Следовательно, все утверждения из 2—4 следуют из ядерной спектральной теоремы.

Мера $d\rho(\lambda)$ на спектральном множестве $\Lambda = G$ в (2) называется *мерой Планшереля*.

---

[1]) Определение триплета Гельфанда, формулировку ядерной спектральной теоремы и обозначения см. в приложении Б.3.

Замечание 1. В силу формулы (27) приложения Б. 3 формула (3) может быть записана в виде

$$\overline{T(X)'}\, e(\lambda, g) = \hat{X}(\lambda)\, e(\lambda, g), \quad X \in L, \tag{7}$$

где $\overline{T(X)'}$ — расширение оператора $\overline{T(X)}$, полученное расширением области определения $D(\overline{T(X)})$ теми элементами φ' из Φ', для которых выполняется равенство

$$\langle \overline{T(X)}\varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi, \overline{T(X)'}\varphi' \rangle, \quad \varphi \in \Phi, \quad \varphi' \in \Phi'. \tag{8}$$

Замечание 2. Так как мера Планшереля на спектральном множестве $\Lambda = \hat{G}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $d\lambda$ (т. е. $d\rho(\lambda) = \rho(\lambda)\, d\lambda$, $\rho(\lambda)$ непрерывна на Λ), то в силу формулы (29) приложения Б. 3 получаем следующее соотношение ортогональности для обобщенных собственных векторов:

$$\int_G e(\lambda, g)\, \overline{e(\lambda', g)}\, d\mu(g) = \rho^{-1}(\lambda)\, \delta(\lambda - \lambda'). \tag{9}$$

Это обобщение хорошо известного соотношения ортогональности в обычном анализе Фурье на R^n:

$$\int_{R^n} \exp(i\lambda x)\, \overline{\exp(i\lambda' x)}\, d^n x = (2\pi)^n\, \delta^{(n)}(\lambda - \lambda'). \tag{10}$$

В обоих случаях эти интегралы понимаются как слабые интегралы от регулярных распределений $e(\lambda, g)\, \overline{e(\lambda', g)}$ на G.

Таким образом, мы видим, что ядерная спектральная теорема дает прямое распространение гармонического анализа на R^n на произвольные абелевы группы Ли.

В случае компактных групп гармонический анализ в гильбертовом пространстве $H = L^2(G, \mu)$, где μ — нормированная мера Хаара на G, по существу дается теоремой Петера—Вейля 7.2.1, которая утверждает, что произвольная функция $u(g) \in H$ может быть представлена в виде

$$u(g) = \sum_{\lambda, p, q} \hat{u}_{pq}(\lambda)\, D^{\lambda}_{pq}(g), \tag{11}$$

где $\Lambda = \{\lambda\}$ — дуальный объект $\hat{G}$ к G, а $D^{\lambda}_{pq}(g)$ — матричные элементы неприводимого представления T^{λ} группы G. Обобщенное преобразование Фурье $\hat{u}_{pq}(\lambda)$ функции $u \in H$ задается формулой (7.2.6):

$$\hat{u}_{pq}(\lambda) = d^{\lambda} \int_G u(g)\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(g)}\, d\mu(g), \tag{12}$$

где d^λ — размерность представления T^λ группы G. Матричные элементы $D^\lambda_{pq}(g)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности и полноты:

$$\int_G D^\lambda_{pq}(g)\overline{D^{\lambda'}_{p'q'}(g)}\,d\mu(g) = \frac{1}{d^\lambda}\delta^{\lambda\lambda'}\delta_{pp'}\delta_{qq'}, \tag{13}$$

$$\sum_{\lambda,\,p,\,q} d^\lambda D^\lambda_{pq}(g)\overline{D^\lambda_{pq}(g)} = \delta(g-g') \tag{14}$$

[см. формулы (7.1.9) и (7.2.20)].

§ 2. Гармонический анализ на унимодулярных группах Ли

Простота гармонического анализа на компактных группах связана с тем фактом, что коммутант T' произвольного представления T группы G порождается компактным самосопряженным оператором K_u, заданным формулой (7.1.4). Поскольку каждый компактный оператор имеет только дискретный спектр, разложение произвольной функции дается в виде дискретной суммы (1.11). В дополнение базисные функции $D^\lambda_{pq}(g)$, которые дают разложение произвольной функции $u \in L^2(G, \mu)$, были матричными элементами неприводимых представлений T^λ группы G и удовлетворяли соотношениям ортогональности и полноты (1.13) и (1.14).

В случае произвольной группы Ли коммутант T' регулярного представления T группы G может содержать операторы с непрерывными спектрами. Поэтому в общем случае получаем разложение в прямой интеграл как представлений в $H = L^2(G, \mu)$, так и функций $u \in H$. Это типичная особенность некомпактных групп. Кроме того, соотношения ортогональности и полноты (1.13) и (1.14) имеют место только в частных случаях и нуждаются в дополнительной интерпретации как произведения распределений. Поскольку собственные функции операторов с непрерывными спектрами являются не элементами из $L^2(G, \mu)$, а лишь линейными функционалами на плотном множестве $\Phi \subset H$ гладких функций, мы имеем дело с триплетом $\Phi \subset H \subset \Phi'$, а не с одним пространством $H = L^2(G, \mu)$. Изящный и эффективный формализм для рассмотрения непрерывных спектров самосопряженных операторов дается ядерной спектральной теорией, представленной в приложении Б.1. Эта теория дает удовлетворительную формулировку для распространения гармонического анализа от абелевых и компактных групп до случая некомпактных групп Ли.

Пусть G — унимодулярная группа Ли. Дадим сначала описание инвариантных операторов, которые порождают центр коммутанта T' регулярного представления T в гильбертовом пространстве $H = L^2(G, \mu)$.