Здесь интегрирование ведется по множеству унитарных неприводимых представлений, на которых мера Планшереля $\rho(\cdot)$ не обращается в нуль.

Равенство Планшереля (17) может быть записано в виде

$$(\varphi, \psi)_H = (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})_{\widehat{H}} = \int_{\Lambda} \sum_{p, q} F_{qp}(\lambda) \overline{G_{qp}(\lambda)} \, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{\Lambda} \operatorname{Tr} \{F(\lambda) G^*(\lambda)\} \, d\rho(\lambda). \tag{42}$$

§ 3. Гармонический анализ на полупрямом произведении групп

Общая теория гармонического анализа на унимодулярных группах Ли охватывает также унимодулярные полупрямые произведения $G = N \rtimes G_A$, где G_A — группа автоморфизмов группы N. Мы ограничиваемся в этом параграфе описанием общей теории для двух наиболее важных полупрямых произведений, а именно для евклидовых групп $E_n = T^n \rtimes \mathrm{SO}(n)$ и для обобщенных групп Пуанкаре $\Pi_n = T^n \rtimes \mathrm{SO}(n-1, 1)$, $n = 2, 3, \ldots$. Используя теорему 3.10.5, легко проверить, что все группы E_n и Π_n унимодулярны.

Опишем сначала явно максимальное множество коммутирующих дифференциальных операторов в пространстве $H = L^2(G, \mu)$. Мы знаем, что множество $\{C_i\}$ алгебраически независимых инвариантных операторов для E_n или для Π_n состоит из $\{n/2\}$ операторов (упражнение 9.7.3.1). Определим теперь дополнительные операторы, которые вместе с множеством $\{C_i\}$ дают максимальное множество алгебраически независимых коммутирующих операторов.

Пусть

$$\mathrm{SO}(n) \supset \mathrm{SO}(n-1) \ldots \supset \mathrm{SO}(2), \tag{1}$$

$$\mathrm{SO}(n-1, 1) \supset \mathrm{SO}(n-1) \supset \ldots \supset \mathrm{SO}(2) \tag{2}$$

— последовательности последовательных максимальных подгрупп в $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SO}(n-1, 1)$ соответственно. Пусть $\{A_j\}_1^m$ — максимальное множество «+»-симметрических алгебраически независимых операторов Казимира в обертывающей алгебре E^L для G, соответствующих последовательным подгруппам в последовательности (1) или (2). Пусть $\{B_k\}_1^m$ — соответствующее максимальное множество «+»-симметрических алгебраически независимых операторов в обертывающей алгебре E^R для G.

Легко проверить, что

$$m = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \dim G_A\right).$$

Поскольку

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+2m=\dim G,$$

множества $\{C_i\}_1^{[(n+1)/2]}$, $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ дают максимальное множество независимых коммутирующих операторов в пространстве представления $H=L^2(G,\ \mu)$.

Основные особенности гармонического анализа на E_n или Π_n описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть G_n — одна из групп E_n или Π_n, $n=2, 3, \ldots$, и пусть $g\to T_g$ — регулярное представление группы G_n в гильбертовом пространстве $H=L^2(G,\ \mu)$, заданное формулой* (2.4).

Пусть $\{C_i\}_1^{[(n+1)/2]}$ — последовательность двусторонне инвариантных операторов группы G_n в H, и пусть $\{A_j\}_1^m$ и $\{B_k\}_1^m$ — максимальные множества независимых «+»-симметрических операторов Казимира, соответствующих последовательностям подгрупп (1) *или* (2) *соответственно. Тогда*

1. *Существует разложение в прямой интеграл*

$$H\to\widehat{H}=\int_\Lambda \widehat{H}(\lambda)\,d\rho(\lambda),\quad T_g\to\widehat{T}_g=\int \widehat{T}_g(\lambda)\,d\rho(\lambda) \tag{3}$$

пространства H и представления T_g, такое, что $(\widehat{H}(\lambda),\ T_g(\lambda))$ почти всюду неприводимо относительно ρ.

2. *Существует триплет Гельфанда $\Phi\subset H\subset\Phi'$ и базис $e_{pq}(\lambda,\ g)$, такие, что имеют место соотношения* (2.12)—(2.14).

3. *Для $\varphi\in\Phi$ формула спектрального синтеза имеет вид*

$$\varphi(g)=\int_\Lambda d\rho(\lambda)\sum_{p,q=1}^{\dim\widehat{H}(\lambda)}\widehat{\varphi}_{pq}(\lambda)\,e_{pq}(\lambda,g), \tag{4}$$

где

$$\widehat{\varphi}_{pq}(\lambda)=\int_G \varphi(g)\overline{e_{pq}(\lambda,g)}\,d\mu(g). \tag{5}$$

4. *Для $\varphi,\ \psi\in\Phi$ равенство Планшереля имеет вид* (2.17).

Доказательство. Доказательства всех утверждений теоремы 1, за исключением формулы (5), параллельны доказательствам подобных утверждений теоремы 2.1, и мы их опускаем. Формула (5) вытекает из того факта, что, например, для E_n оператор Нельсона $\Delta=P_\mu P^\mu+C_2(\mathrm{SO}(n))$ диагонализируется вместе с операторами $C_2(\mathrm{SO}(n))$ и $M^2=P_\mu P^\mu$. Поскольку Δ эллиптичен, формула (5) следует из утверждения 2.2.

Ясно, что утверждения 2.3 и 2.4 также справедливы для групп E_n и Π_n.

Рассмотрим теперь пример, который ясно иллюстрирует основные особенности гармонического анализа на некомпактных некоммутативных группах Ли.

Пример 1. Пусть $G = E_2 = T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Если $x = (x_1, x_2) \in T^2$ и $\alpha \in \mathrm{SO}(2)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, то закон композиции в G задается формулой

$$(x, \alpha)(x', \alpha') = (x + x'_\alpha, \alpha + \alpha'), \tag{6}$$

где

$$x'_\alpha = (x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha,\ x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha).$$

Из закона композиции (6) следует

$$(x, \alpha)^{-1} = (-x_{-\alpha}, 2\pi - \alpha). \tag{7}$$

Легко проверить, что инвариантная мера на G имеет вид

$$d\mu\,[(x, \alpha)] = dx_1\, dx_2\, d\alpha. \tag{8}$$

Пусть $H = L^2(G, \mu)$. Правое и левое регулярные представления T^R и T^L группы G в H задаются формулами

$$(T^R_{(x', \alpha')} u)\,[(x, \alpha)] = u\,[(x, \alpha)(x', \alpha')] = u\,[(x + x'_\alpha, \alpha + \alpha')], \tag{9}$$

$$(T^L_{(x', \alpha')} u)\,[(x, \alpha)] =$$

$$= u[(x', \alpha')^{-1}(x, \alpha)] = u\,[(-x'_{-\alpha'} + x_{2\pi-\alpha'}, 2\pi - \alpha' + \alpha)]. \tag{10}$$

Генераторы X_i, $i = 1, 2, 3$, однопараметрических подгрупп $g(t_i)$, соответствующих левому регулярному представлению (т. е. принадлежащие правой инвариантной алгебре Ли), задаются формулой

$$X_i u = \lim_{t_i \to 0} \left(\frac{T^L_{g(t_i)} - I}{t_i} u \right), \tag{11}$$

где u — элемент области Гординга. Используя (10) и (11), получаем

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial \alpha}. \tag{12}$$

Аналогично, используя формулу

$$Y_i u = \lim_{t_i \to 0} \left(\frac{T^R_{g(t_i)} - I}{t_i} u \right) \tag{13}$$

и формулу (9), получаем следующие выражения для генераторов левоинвариантной алгебры Ли группы G:

$$Y_1 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$Y_2 = -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{14}$$
$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Ясно, что каждый оператор X_i коммутирует со всеми операторами Y_k, i, $k = 1, 2, 3$. Левоинвариантная и правоинвариантная алгебры Ли удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[Z_1, Z_2] = 0, \quad [Z_2, Z_3] = Z_1, \quad [Z_3, Z_1] = Z_2. \tag{15}$$

Легко проверить, что инвариантный оператор имеет вид

$$C_1 = Z_1^2 + Z_2^2. \tag{16}$$

Поэтому

$$C_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{17}$$

или в сферических координатах

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi,$$
$$C_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{18}$$

Используя описанный в теореме 1 общий метод для выбора максимального множества коммутирующих операторов, получаем

$$C_1, \quad A_1 = X_3 = -\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad B_1 = Y_3 = \frac{\partial}{\partial\alpha}. \tag{19}$$

Это максимальное множество независимых коммутирующих дифференциальных операторов, поскольку размерность группы G равна трем.

Найдем теперь явный вид собственных функций $e_{pq}(\lambda, g) \equiv \equiv D^{\lambda}_{pq}(g)$. Выражения (18) и (19) показывают, что общие собственные функции операторов C_1, A_1 и B_1 следует искать в виде

$$D^{\lambda}_{pq}(\varphi, r, \alpha) = \exp(\mathrm{i}\, p\varphi)\, d^{\lambda}_{pq}(r) \exp[-\mathrm{i}q(\alpha + \varphi)]. \tag{20}$$

Выражения (20) являются собственными функциями операторов X_3 и Y_3, тогда как $C_1 D^{\lambda}_{pq} = \widehat{C}_1(\lambda)\, D^{\lambda}_{pq}$ дает следующее уравнение для $d^{\lambda}_{pq}(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(p-q)^2}{r^2}\right) d^{\lambda}_{pq}(r) = \widehat{C}_1(\lambda)\, d^{\lambda}_{pq}(r). \tag{21}$$

Это классическая форма уравнения Бесселя, (регулярные) решения которого имеют вид

$$d_{pq}^{\lambda}(r) = i^{p-q} J_{p-q}\left(-i\sqrt{\widehat{C}_1(\lambda)}\, r\right). \tag{22}$$

Оператор C_1 кососопряжен (по теореме Нельсона—Стайнспринга) и в силу (17) отрицательно определен. Поэтому собственные значения $\widehat{C}_1(\lambda)$ оператора C_1 отрицательны. Положив $\widehat{C}_1(\lambda) = -\lambda^2$, $\lambda \in R$, из (22) и (20) получаем

$$D_{pq}^{\lambda}(\varphi, r, \alpha) = i^{p-q} \exp[i(p-q)\varphi]\, J_{p-q}(\lambda r) \exp[iq\alpha]. \tag{23}$$

Известно, что спектральная мера $d\rho(\lambda)$ для уравнения Бесселя имеет вид $d\rho(\lambda) = \lambda d\lambda$. Поэтому соотношения ортогональности и полноты для функций $D_{pq}^{\lambda}(\varphi, r, \alpha)$ имеют вид

$$\int D_{pq}^{\lambda}(\varphi, r, \alpha)\, \overline{D_{p'q'}^{\lambda'}(\varphi, r, \alpha)}\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha = \delta_{p'p}\delta_{q'q} \frac{\delta(\lambda - \lambda')}{\lambda}, \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{p,\, q} D_{pq}^{\lambda}(\varphi, r, \alpha)\, \overline{D_{pq}^{\lambda}(\varphi', r', \alpha')} =$$

$$= \delta(\varphi - \varphi') \frac{1}{r} \delta(r - r')\, \delta(\alpha - \alpha'). \tag{25}$$

Поскольку $J_{p-q}(0) = \delta_{pq}$, функции $D_{pq}^{\lambda}(e)$ удовлетворяют условию нормировки (2.24), т. е. $D_{pq}^{\lambda}(e) = \delta_{pq}$, где $e = (0, 0, 0)$ — единица группы G. Следовательно, функции $D_{pq}^{\lambda}(g)$ удовлетворяют условию унитарности

$$D_{pq}^{\lambda}(g^{-1}) = \overline{D_{qp}^{\lambda}(g)} \tag{26}$$

и закону композиции

$$\sum_s D_{ps}^{\lambda}(g_1)\, D_{sq}^{\lambda}(g_2) = D_{pq}^{\lambda}(g_1 g_2). \tag{27}$$

Заметим, что последняя формула позволяет вывести различные законы сложения для функций Бесселя. Легко проверить, что если $g_1 = (0, r_1, 0)$ и $g_2 = (\varphi_2, r_2, 0)$, то $g_1 g_2 = (\varphi, r, \alpha)$ задается соотношениями

$$r = [r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varphi_2]^{1/2}, \quad \exp(i\varphi) = \frac{r_1 + r_2 \exp(i\varphi_2)}{r}, \quad \alpha = 0. \tag{28}$$

Тогда при $\lambda = 1$ соотношение (27) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\varphi_2)\, J_{n-k}(r_1)\, J_k(r_2) = \exp(in\varphi)\, J_n(r). \tag{29}$$

В частности, при $\varphi_2 = 0$ имеем $r = r_1 + r_2$, и соотношение (29) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) = J_n(r_1 + r_2), \tag{30}$$

а при $\varphi_2 = \pi$, $r_1 \geqslant r_2$, имеем $r = r_1 - r_2$ и $\varphi = 0$. Поэтому соотношение (29) дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) = J_n(r_1 - r_2). \tag{31}$$

§ 4. Комментарии и дополнения

А. *Мера Планшереля*

Первый существенный общий результат в гармоническом анализе на сепарабельных унимодулярных группах был получен Сигалом [746]. С каждым $\varphi \in H = L^2(G, \mu)$ он сопоставлял оператор

$$T(\varphi) = \int \varphi(g) T_g \, d\mu(g), \tag{1}$$

где T_g — унитарное представление группы G.

Согласно теореме Маутнера, $T(\varphi)$ имеет следующее разложение в прямой интеграл:

$$T(\varphi) \to \widehat{T}(\varphi) = \int \widehat{F}(\lambda) \, d\rho(\lambda).$$

Сигнал называет $\{\widehat{F}(\lambda)\}$ преобразованием Фурье функции φ и доказывает следующую теорему Планшереля:

$$\int_G |\varphi(g)|^2 \, d\mu(g) = \int_\Lambda \langle \widehat{F}(\lambda), \widehat{F}(\lambda) \rangle_\lambda \, a(\lambda) \, d\rho(\lambda), \tag{2}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ обозначает внутреннее произведение в банаховом пространстве ограниченных операторов в пространстве $\widehat{H}(\lambda)$, а $a(\lambda)$ — положительная ρ-измеримая функция.

(Доказательство см. в [746], теорема 3.)

Для приложений важно знать явный вид меры Планшереля. Эта задача была решена для классических комплексных групп Ли Гельфандом и Наймарком [315] (упрощенный вывод см. в [303]). Например, в случае группы SL (n, C) неприводимые унитарные представления $\widehat{T}(\lambda)$ обозначаются мультииндексом $\lambda = (m_2, \ldots, m_n, \rho_2, \ldots, \rho_n)$, где m_i — целые числа, а ρ_i — вещественные числа (гл. 19, § 3).