Глава 15

Гармонический анализ на однородных пространствах

Гармонический анализ на однородных пространствах представляет собой другую очень важную, но трудную часть теории представлений групп. Степень трудности хорошо иллюстрируется классическим трактатом по абстрактному гармоническому анализу Хьюитта и Росса [405, 406], в котором понятие гармонического анализа появляется только после 1065 страниц «вводного материала».

Мы сначала сформулируем основные задачи гармонического анализа.

Пусть X — однородное пространство, G — локально компактная группа преобразований на X, а K — стационарная подгруппа в G. Пусть $d\mu(x)$ — квазиинвариантная мера на X, заданная теоремой Макки (гл. 4, § 3.1), и пусть $H = L^2(X, \mu)$. Отображение $g \to T_g$, заданное формулой

$$T_g u(x) = \sqrt{\frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)}}\, u(xg), \tag{1}$$

дает унитарное представление T группы G в H.

Две основные задачи гармонического анализа состоят в следующем.

1. *Спектральный анализ.* Разложение представления (1) и пространства представления H в прямые интегралы

$$T_g \to \widehat{T}_g = \int_\Lambda \widehat{T}_g(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad H \to \widehat{H} = \int_\Lambda \widehat{H}(\lambda)\, d\rho(\lambda) \tag{2}$$

неприводимых представлений $\widehat{T}_g(\lambda)$ группы G в $\widehat{H}(\lambda)$ и определение спектра.

2. *Спектральный синтез.* Определение плотного подпространства $\Phi \subset H$, такого, что для каждого $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(x) = \int_\Lambda d\rho(\lambda) \sum_{k=1}^{\dim \widehat{H}(\lambda)} \widehat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda, x)\, d\rho(\lambda), \tag{3}$$

где $\{e_k(\lambda, x)\}_{k=1}^{\dim H'(\lambda)}$ — базис в $H'(\lambda)$ [1]), а

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle \tag{4}$$

— компонента функции $\varphi \in H$ в $\hat{H}(\lambda)$.

§ 1. Инвариантные операторы на однородных пространствах

С задачей спектрального анализа связана задача поиска максимального множества $\{C_i\}_1^n$ независимых инвариантных коммутирующих операторов. В противоположность мнению, распространенному среди физиков, множество $\{C_i\}_1^n$ может содержать больше инвариантных операторов, чем можно получить из центра Z обертывающей алгебры E группы G. В самом деле, пусть $N(K)$ — нетривиальный нормализатор в G стационарной подгруппы K точки из X, т. е. множество всех $n \in G$, таких, что $nKn^{-1} \subset K$. Тогда, используя соответствие $x_g \to K_g$ между элементами пространства X и классами смежных элементов Kg, получаем

$$nx_g \sim nKg = Kng = x_{ng}.$$

Отсюда следует, что левые сдвиги X элементами из N и правые сдвиги X элементами из G коммутируют. Поэтому

$$(T_n^L T_g u)(x) = (T_g T_n^L u)(x). \tag{5}$$

Следовательно, если фактор-группа $N(K)/K$ нетривиальна, то максимальное множество операторов, сопоставляемых с группой $N(K)/K$, дает дополнительное множество инвариантных операторов, кроме полученных из центра Z обертывающей алгебры E группы G. Если $N(K)/K$ некоммутативна, то дополнительное множество инвариантных дифференциальных операторов, сопоставляемых с $N(K)/K$, также некоммутативно.

Заметим, что группа Ли может иметь инвариантные операторы, которые не являются элементами обертывающей алгебры и даже не являются дифференциальными операторами. Например, в случае группы Пуанкаре в дополнение к оператору квадрата массы $P_\mu P^\mu$ ($\sim m^2 = p_\mu p^\mu$) и оператору квадрата спина $W_\mu W^\mu$ ($\sim m^2 J \times \times J(J+1)$), которые являются дифференциальными операторами из центра $Z(E)$, мы имеем инвариантный оператор $Q = \operatorname{sign} p_0$, где p_0 — собственное значение генератора P_0 в пространстве представления. Оператор Q не является ни элементом из $Z(E)$, ни дифференциальным оператором.

---

[1]) Заметим, что $\hat{H}(\lambda)$ и $H'(\lambda) \subset \Phi'$ изоморфны, но различны; см. формулу (30) в приложении Б.3.

Пример 1. Пусть G — группа Пуанкаре $T^4 \rtimes$ SL (2, C), и пусть

$$K = T^4 \rtimes Z, \tag{6}$$

где Z — двумерная нильпотентная группа, состоящая из комплексных матриц вида

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad z \in C^1. \tag{7}$$

Поэтому $X = G/K$ — четырехмерное однородное пространство. В силу разложения Гаусса (3.6.3) для SL (2, C) подгруппа $S = ZD$, где

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \delta \in C^1 \right\},$$

имеет Z в качестве нормальной подгруппы. Поэтому нормализатор $N(K)$ подгруппы K является группой

$$N(K) = T^4 \rtimes S. \tag{8}$$

Таким образом,

$$N(K)/K = D. \tag{9}$$

Следовательно, в дополнение к операторам квадрата массы $P_\mu P^\mu$ и квадрата спина $W_\mu W^\mu$, которые являются генераторами центра Z обертывающей алгебры E группы Пуанкаре в пространстве $H = L^2(X, \mu)$, $X = G/K$, имеются два дополнительных инвариантных оператора, сопоставляемых с генераторами подгруппы D.

В случае произвольных групп Ли G и $K \subset G$ задача поиска нормализатора $N(K)$ подгруппы K в G не решена. Поэтому мы не имеем общей характеристики множества $\{C_i\}_1^n$ независимых инвариантных операторов в пространстве $H = L^2(X, \mu)$, $X = G/K$. Однако для многих частных групп G и K существует более конкретная характеристика множества $\{C_i\}_1^n$. Например, если G — полупростая связная группа Ли, а K — максимальная компактная подгруппа в G, то из разложения Картана группы G: $G = KP$ следует, что между G и K не существует никакой подгруппы G_0 большей размерности, чем размерность подгруппы K. Поэтому $N(K)/K$ не более чем дискретная группа. Отсюда следует, что не существует никаких дополнительных инвариантных дифференциальных операторов в $\{C_i\}_1^n$, которые исходят из $N(K)/K$.

Нужно также отметить следующую связь между свойствами однородных пространств и свойствами множества $\{C_i\}_1^n$ инвариантных операторов: если стационарная группа K точки в X мала, то число инвариантных операторов в $\{C_i\}$ большое и $\{C_i\}$ может даже содержать инвариантные операторы, не принадлежащие обертывающей алгебре. Обратно, если стационарная подгруппа K

становится большей, то существует больше связей в X и число инвариантных операторов уменьшается. В этом случае даже те инвариантные операторы, которые были алгебраически независимы в центре Z алгебры E, становятся зависимыми дифференциальными операторами на пространстве $H = L^2(X, \mu)$. Следующий пример иллюстрирует этот факт.

Пример 2. Пусть G — евклидова группа $T^n \rtimes \mathrm{SO}(n)$. В общем случае G имеет $[(n+1)/2]$ алгебраически независимых операторов из центра Z алгебры E и $X = G/K \sim R^n$. Мы покажем, что центр Z алгебры E в $L^2(X, \mathrm{d}x)$ порождается единственным оператором. В самом деле, пусть $C_i(x_k, \partial/\partial x_l)$ — дифференциальные операторы из Z. Поскольку C_i должны быть инвариантны для всех сдвигов $t \in T^n$, то дифференциальные операторы $C_i(x_k, \partial/\partial x_l)$ имеют постоянные коэффициенты. Следовательно, $C_i = P_i(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где P_i — полиномы. Единственной инвариантной относительно вращений величиной в R^n является радиус $r = |x| = \sqrt{\sum x_l^2}$. Поэтому полиномы P_i должны быть функциями от $\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2 \equiv \Delta$. Тогда произвольный инвариантный дифференциальный оператор в $L^2(X, \mathrm{d}x)$ из обертывающей алгебры E группы G имеет вид

$$C = \sum_{l=1}^{s} C_l \Delta^l. \tag{10}$$

Ясно, что если $G = T^n \rtimes \mathrm{SO}(p, q)$, $p + q = n$, то произвольный инвариантный оператор из обертывающей алгебры E в $L^2(X, \mathrm{d}x)$ также имеет вид (10), где

$$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_p^2 - \partial_{p+1}^2 - \ldots - \partial_{p+q}^2. \tag{11}$$

Следующая теорема дает описание множества инвариантных операторов для симметрического пространства $X = G/K$.

Теорема 1. *Пусть $X = G/K$ — симметрическое пространство ранга l. Тогда алгебра всех G-инвариантных дифференциальных операторов в пространстве $H = L^2(X, \mu)$ является коммутативной алгеброй с l алгебраически независимыми генераторами.*

Если X имеет ранг один, то каждый инвариантный дифференциальный оператор C является полиномом от оператора Казимира второго порядка группы G, который в подходящей системе координат на X совпадает с оператором Лапласа—Бельтрами

$$\Delta = \bar{g}^{-1/2} \partial_\alpha g^{\alpha\beta} \sqrt{\bar{g}}\, \partial_\beta, \tag{12}$$

где $g^{\alpha\beta}(x)$ — *инвариантный метрический тензор на пространстве X и $\bar{g} \equiv |\det g|$.*

(Доказательство см. в [390], гл. 10.)