19.1.2, можно проверить, что почти каждое представление $\widehat{T}_g(\lambda)$ в $\widehat{H}(\lambda)$, полученное ограничением представления $\widehat{T}_g$ на $\widehat{H}(\lambda)$, неприводимо. Поэтому из разложения (1) пространства H следует разложение

$$T_g \to \widehat{T}_g = \int_0^\infty \widehat{T}_g(\lambda)\,d\lambda \tag{28}$$

представления T_g на неприводимые компоненты.

§ 3. Гармонический анализ на симметрических пространствах, соответствующих псевдоортогональным группам SO (p, q)

Псевдоортогональные группы играют важную роль в теоретической физике. Наиболее важная из них — группа Лоренца SO (3, 1) специальной теории относительности.

Группа SO (4, 1), известная как группа де Ситтера, появляется в общей теории относительности, как динамическая группа в теории атома водорода, в периодической таблице элементов, а также в моделях адронов. Конформная группа SO (4, 2) является группой симметрий уравнений Максвелла и появляется в роли группы симметрий или динамической группы в теории элементарных частиц. Другие группы, такие, как SO (2, 1) или SO (4, 3), также часто появляются в приложениях. Поэтому полезно дать детальное описание свойств гармонического анализа на симметрических пространствах, соответствующих группам SO (p, q), и соответствующих представлений групп SO (p, q) на симметрических пространствах.

Полная классификация симметрических пространств, соответствующих группам SO (p, q), дана в табл. 1 и 2 гл. 4. Наиболее важными для приложений являются следующие симметрические пространства.

1. Симметрические пространства Картана

$$X = \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}(p) \otimes \mathrm{SO}(q). \tag{1}$$

Ранг k этих пространств равен $k = \min(p, q)$, а размерность равна pq.

2. Симметрические пространства с некомпактными полупростыми стационарными группами

$$X_{r,s} = \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}_0(r, s) \otimes \mathrm{SO}_0(p-r, q-s), \tag{2}$$
$$0 \leqslant r \leqslant p, \quad 0 \leqslant s \leqslant q.$$

3. Симметрические пространства с некомпактными неполупростыми стационарными группами

$$X_0 = \mathrm{SO}_0(p, q)/T^{p-1, q-1} \times) \mathrm{SO}_0(p-1, q-1). \tag{3}$$

Здесь $T^{n,m}$ — группа трансляций пространства Минковского $M^{n,m}$.

В этом параграфе мы рассмотрим гармонический анализ на симметрических пространствах (1)—(3) ранга один:

$$\begin{aligned} X_+^{p+q-1} &\equiv \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}_0(p-1, q), \\ X_-^{p+q-1} &\equiv \mathrm{SO}_0(p, q)/\mathrm{SO}_0(p, q-1) \end{aligned} \tag{4}$$

и X_0, заданное в (3).

Группы $\mathrm{SO}_0(p, q)$ и стационарные подгруппы пространств X_+, X_- и X_0 все унимодулярны. Поэтому, согласно следствию 1 теоремы 4.3.1, на этих пространствах X_+, X_- и X_0 существует инвариантная мера $d\mu(x)$. Поэтому унитарное представление $g \to T_g$ группы $\mathrm{SO}_0(p, q)$ задается в пространстве $H = L^2(X, \mu)$ формулой

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x). \tag{5}$$

Из теоремы 1.1 мы знаем, что в пространствах $H(X_+)$, $H(X_-)$ и $H(X_0)$ кольцо инвариантных дифференциальных операторов порождается оператором Казимира второго порядка C_2, который на пространствах $H(X_+)$ и $H(X_-)$ совпадает с оператором Лапласа—Бельтрами.

Мы всегда можем выбрать такую систему координат на X_+, X_- или X_0, что операторы Казимира второго порядка групп $\mathrm{SO}(p)$ и $\mathrm{SO}(q)$ будут диагональны. Поэтому эллиптический оператор Нельсона

$$\Delta_N = \sum_{i=1}^{\dim G} X_i^2 = C_2(\mathrm{SO}(p, q)) - 2C_2(\mathrm{SO}(p)) - 2C_2(\mathrm{SO}(q))$$

также диагонален. Следовательно, все предположения теоремы 2.1 выполняются, и мы получаем:

1. Пространство H и представление T_g, заданное формулой (5), могут быть представлены как прямые интегралы

$$H \to \hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad T_g \to \hat{T}_g = \int_\Lambda \hat{T}_g(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

компонент $\hat{H}(\lambda)$ и $\hat{T}_g(\lambda)$ соответственно.

2. Существует триплет Гельфанда $\Phi \subset H \subset \Phi'$, такой, что все элементы $e(\lambda)$ из $H'(\lambda)$ удовлетворяют соотношению (2.7) на собственные значения.

3. Имеет место спектральный синтез (2.4) для функций $\varphi(x) \in \Phi$ и равенство Парсеваля (2.6).

Чтобы выполнить в явном виде разложение пространства H и представления T_g на неприводимые компоненты и получить спектральный синтез для функций $\varphi(x) \in \Phi$ в явном виде, следует найти максимальную абелеву алгебру A в коммутанте T'

представления T и ее спектр Λ. Мы решаем эти задачи следующими этапами.

1. Строим удобную систему координат на X, для которой метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ диагонален.

2. Решаем задачу на собственные значения для оператора Лапласа—Бельтрами:

$$\Delta(X)\, e(\lambda, x) = \widehat{\Delta}(\lambda)\, e(\lambda, x).$$

(Поскольку $[\Delta, Y] = 0$ для всех Y из алгебры Ли L группы G, то пространство $H'(\lambda)$ при фиксированном λ, натянутое на все $e(\lambda, x)$, инвариантно.)

3. Находим дополнительные инвариантные операторы, которые разлагают пространство $\widehat{\mathrm{H}}(\lambda)$ на неприводимые компоненты.

Подчеркнем, что, согласно теореме 1.1, кольцо инвариантных дифференциальных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами. Однако это ничего не говорит о других инвариантных операторах в H. Мы найдем, что в случае симметрических пространств ранга один эти дополнительные инвариантные операторы являются операторами отражений в $H(X)$.

А. Гармонический анализ на симметрических пространствах, соответствующих группам $\mathrm{SO}_0(p, q)$, $p \geqslant q > 2$

Чтобы выбрать подходящую систему координат, нам следует ввести некоторую удобную модель для пространства $X_{\pm}^{p+q-1}$ из (4). Это означает, что мы должны ввести многообразие той же размерности и с той же стационарной группой, что и для $X_{\pm}^{p+q-1}$, на котором группа $\mathrm{SO}_0(p, q)$ действует транзитивно.

Рассуждениями, подобными рассуждениям для случая группы $\mathrm{SO}(p)$ (гл. 4, § 2, пример 1), можно показать, что моделью для пространства X_{+}^{p+q-1} может служить гиперболоид $H^{p,q}$, определенный уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 1. \tag{6}$$

Моделью для пространства X_{-}^{p+q-1} мы берем гиперболоид $H^{q,p}$, определенный уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^q)^2 - (x^{q-1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 1. \tag{7}$$

Если мы введем внутренние координаты $\Omega = \{\eta^1, \ldots, \eta^{p+q-1}\}$ на пространстве $H^{p,q}$ (которое вложено в плоское пространство Минковского $M^{p,q}$), то метрический тензор $g_{\alpha\beta}(H^{p,q})$ на гиперболоиде $H^{p,q}$, индуцированный метрическим тензором $g_{ab}(M^{p,q})$ на пространстве Минковского $M^{p,q}$, будет задаваться формулой

$$g_{\alpha\beta}(H^{p,q}) = g_{ab}(M^{p,q})\, \partial_\alpha x^a(\Omega)\, \partial_\beta x^b(\Omega), \tag{8}$$

где $a, b = 1, 2, \ldots, p+q$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p+q-1$ и x^a — декартовы координаты на гиперболоиде Ω.

В общем случае мы можем выбрать большое число различных систем координат на гиперболоиде $H^{p,q}$, таких, что оператор Лапласа—Бельтрами допускает разделение переменных. Однако наиболее удобной системой координат является бигармоническая система, так как в этой системе генераторы максимальной абелевой компактной подалгебры алгебры Ли группы $SO_0(p, q)$ автоматически содержатся в максимальном множестве коммутирующих операторов.

Бигармоническая система координат на сфере S^n введена в (10.3.5а).

Бигармоническая система координат на гиперболоиде $H^{p,q}$, заданном формулой (6), строится следующим образом:

$$\begin{aligned} x^k &= x'^k \operatorname{ch}\theta, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ x^{p+l} &= \tilde{x}^l \operatorname{sh}\theta, \quad l = 1, 2, \ldots, q, \quad \theta \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{9}$$

где вид x'^k и $\tilde{x}^l$ зависит от того, четными или нечетными являются p и q. Мы должны различать четыре случая:

$$\begin{array}{lll} 1) & p = 2r, & q = 2s, \\ 2) & p = 2r, & q = 2s+1, \\ 3) & p = 2r+1, & q = 2s, \\ 4) & p = 2r+1, & q = 2s+1, \end{array} \quad r, s = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Если p четно ($p = 2r$), то соответствующие x'^k ($k = 1, 2, \ldots, 2r$) задаются рекурсивными формулами:

$$\begin{array}{lll} \text{для } r = 1 & x'^1 = \cos\varphi^1, & \\ & x'^2 = \sin\varphi^1, & \varphi^1 \in [0, 2\pi), \\ \text{для } r > 1 & x'^i = x^{*i} \sin\theta^r, & i = 1, 2, \ldots, 2r-2, \\ & x'^{2r-1} = \cos\varphi^r \cos\theta^r, & \varphi^j \in [0, 2\pi),\ j = 2, 3, \ldots, r, \\ & x'^{2r} = \sin\varphi^r \cos\theta^r, & \theta^k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad k = 2, 3, \ldots, r, \end{array} \tag{11}$$

где x^{*i} — координаты для $p = 2(r-1)$.

Если p нечетно ($p = 2r+1$), то мы раньше строим x^{*i}, $i = 1, 2, \ldots, 2r$, используя вышеупомянутый метод для $p = 2r$. Затем получаем соответствующие x'^k, $k = 1, 2, \ldots, 2r+1$:

$$\begin{aligned} x'^i &= x^{*i} \sin\theta^{r+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2r, \\ x'^{2r+1} &= \cos\theta^{r+1}, \quad \theta^{r+1} \in [0, \pi). \end{aligned} \tag{12}$$

Рекурсивные формулы для $\tilde{x}^l$ при четных или нечетных q те же, что и для x'^k при четных или нечетных p соответственно, за исключением того, что углы φ^i, θ^i в x'^k заменяются на $\tilde{\varphi}^i$, $\tilde{\theta}^i$.

Выбрав параметризацию $\Omega \equiv \{\omega, \tilde{\omega}, \theta\}$ на гиперболоиде $H^{p,q}$ в виде

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \{\varphi^1, \ldots, \varphi^{[p/2]}, \theta^2, \ldots, \theta^{\{p/2\}}\}, \\ \tilde{\omega} &\equiv \{\tilde{\varphi}^1, \ldots, \tilde{\varphi}^{[q/2]}, \tilde{\theta}^2, \ldots, \tilde{\theta}^{\{q/2\}}\} \end{aligned} \tag{13}$$

и введя обозначение

$$\{\partial_\gamma\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi^{[p/2]}}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\{p/2\}}}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}^1}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^2}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}^{[q/2]}}, \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^{\{q/2\}}}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\}, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, p+q-1, \tag{14}$$

мы можем вычислить метрический тензор $g_{\alpha\beta}(H^{p,q})$, а также оператор Лапласа—Бельтрами $\Delta(H^{p,q})$.

Так как во всех четырех случаях, показанных в (10), в силу свойств метрического тензора (8) переменные в операторе Лапласа—Бельтрами разделяются одинаковым образом, мы можем записать оператор $\Delta(H^{p,q})$ в виде

$$\Delta(H^{p,q}) = -(\operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \\ + \frac{\Delta(S^{p-1})}{\operatorname{ch}^2\theta} - \frac{\Delta(S^{q-1})}{\operatorname{sh}^2\theta}, \tag{15}$$

где $\Delta(S^{p-1})$ $[\Delta(S^{q-1})]$ — оператор Лапласа—Бельтрами группы вращений SO (p) [SO (q)] (гл. 10, § 3). Если мы представим собственные функции оператора $\Delta(H^{p,q})$ в виде произведения собственных функций операторов $\Delta(S^{p-1})$, $\Delta(S^{q-1})$ и функции $\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$, то получим следующее уравнение:

$$\left[-(\operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta)^{-1}\frac{d}{d\theta}\operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta\frac{d}{d\theta} - \frac{l_{\{p/2\}}(l_{\{p/2\}}+p-2)}{\operatorname{ch}^2\theta} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{l}_{\{q/2\}}(\tilde{l}_{\{q/2\}}+q-2)}{\operatorname{sh}^2\theta} - \hat{\Delta}(\lambda)\right]\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = 0, \tag{16}$$

где $l_{\{p/2\}}(l_{\{p/2\}}+p-2)$ $[\tilde{l}_{\{q/2\}}(\tilde{l}_{\{q/2\}}+q-2)]$ — собственные значения оператора $\Delta(s^{p-1})$ $[\Delta(S^{q-1})]$ $(l_{\{p/2\}}$ $[\tilde{l}_{\{q/2\}}]$ —определенные неотрицательные целые числа для $p > 2$ $[q > 2])$.

Дискретная серия представлений существует, если существуют решения уравнения (16), которые являются квадратично

интегрируемыми функциями $\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$, $\theta \in [0, \infty]$, относительно меры

$$d\mu(\theta) = \operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta\, d\theta, \tag{17}$$

индуцируемой мерой $d\mu(x)$ на гиперболоиде $H^{p,q}$, которая в бигармонических координатах имеет вид [1])

$$d\mu(\Omega) = \bar{g}(H^{p,q})^{1/2}\, d\Omega = d\mu(\omega)\, d\mu(\tilde{\omega}) \operatorname{ch}^{p-1}\theta \operatorname{sh}^{q-1}\theta\, d\theta. \tag{18}$$

Левоинвариантная мера $d\mu(\omega)$ (относительно $SO(p)$) определяется формулой (10.3.14). Так как дифференциальное уравнение (16) имеет мероморфные коэффициенты, которые регулярны в интервале $(0, \infty)$, любые два линейно независимых решения также являются регулярными аналитическими в этом интервале. Поскольку в начальной точке и на бесконечности коэффициенты сингулярны, решения в общем не являются регулярными в этих точках; легко можно найти два существенно различных поведения решений в начальной точке:

$$\psi_1^0 \sim \theta^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}, \quad \psi_2^0 \sim \theta^{-\tilde{l}_{\{q/2\}}-q+2}$$

и на бесконечности:

$$\psi_{1,2}^{\infty} \sim \exp\left\{-\frac{1}{2}(p+q-2) \pm \left[\frac{1}{2}(p+q-2)^2 - \hat{\Delta}(\lambda)\right]^{1/2}\right\}\theta.$$

Единственным удовлетворительным решением, т. е. решением, квадратично интегрируемым относительно нашей меры $d\mu(\theta)$, заданной формулой (17), является решение, которое ведет себя в начальной точке как $\psi_1^0(\theta)$ и на бесконечности как $\psi_2^{\infty}(\theta)$. Мы получаем решение уравнения (16) с этими свойствами, превратив (16) в гипергеометрическое уравнение, решением которого является

$$\psi^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = \operatorname{th}^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}\theta \operatorname{ch}^{-\{(p+q-2)/2+[(p+q-2)^2/2+\hat{\Delta}(\lambda)]^{1/2}\}}\theta \times$$
$$\times {}_2F_1\left(-n + l_{\{p/2\}} + \frac{p-2}{2},\ -n;\ \tilde{l}_{\{q/2\}} + \frac{q}{2};\ \operatorname{th}^2\theta\right),$$

где неотрицательное целое число n связано с $l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ и $\hat{\Delta}(\lambda)$ тем условием, что ${}_2F_1$ — полином, т. е.

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - 2n = \frac{1}{2}(p+q-2) + \left\{\left[\frac{1}{2}(p+q-2)\right]^2 -\right.$$
$$\left. - \hat{\Delta}(\lambda)\right\}^{1/2} - p + 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

[1]) Мера $d\mu(x) = [\bar{g}(H^{p,q})]^{1/2}\, d\Omega$ является римановой мерой, которая левоинвариантна при действии группы $SO_0(p, q)$. См. гл. 4, § 3.

Из этого ограничительного условия мы можем найти, что дискретный спектр оператора $\Delta(H^{p,q})$ имеет вид

$$\hat{\Delta}(\lambda) = -L(L+p+q-2), \quad L = -\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\},$$

$$-\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}+1, \ldots \tag{20}$$

и

$$L = l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - q - 2\eta. \tag{21}$$

Таким образом, ортонормированные собственные функции инвариантного оператора $\Delta(H^{p,q})$ имеют вид

$$Y^{L,\, l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_2,\, \ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]},\, \tilde{m}_1,\, \ldots,\, \tilde{m}_{[q/2]}}(\omega, \tilde{\omega}, \theta) =$$

$$= Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]}}(\omega) \cdot Y^{\tilde{l}_2,\, \ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\, \ldots,\, \tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega}) \cdot V^{L}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta), \tag{22}$$

где

$$Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{\{p/2\}}}_{m_1,\, \ldots,\, m_{[p/2]}}(\omega) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} Y^{l_2,\, \ldots,\, l_r}_{m_1,\, \ldots,\, m_r}(\omega) = (N_r^{-1/2}) \prod\limits_{k=2}^{r} \sin^{2-k}(\theta^k)\, d^{J_k}_{M_k, M'_k}(2\theta^k) \prod\limits_{k=1}^{r} \exp i m_k \varphi^k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } p = 2r, \\ Y^{l_2,\, \ldots,\, l_{r+1}}_{m_1,\, \ldots,\, m_r}(\omega) = (N_{r+1}^{-1/2}) \sin^{1-r}(\theta^{r+1})\, d^{J_{r+1}}_{M_{r+1},\, 0}(\theta^{r+1}) \times \\ \times \prod\limits_{k=2}^{r} \sin^{2-k}(\theta^k)\, d^{J_k}_{M_k,\, M'_k}(2\theta^k) \prod\limits_{k=1}^{r} \exp i m_k \varphi^k, \quad \text{если } p = 2r+1, \end{cases} \tag{23}$$

— собственные функции оператора $\Delta(S^{p-1})$, полученные в гл. 10, § 3 [выражения (19) и (20)], и $Y^{\tilde{l}_2,\, \ldots,\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\, \ldots,\, m_{[q/2]}}(\tilde{\omega})$ — собственные функции оператора $\Delta(S^{q-1})$, выраженные в виде произведения обычных d-функций угловых моментов и экспоненциальных функций точно так, как в (23), но с переменными $\tilde{\varphi}^i$, $\tilde{\theta}^i$ и $\tilde{l}_k$, $\tilde{m}_l$ вместо φ^i, θ^i и l_k, m_l. Функция $V^{L}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$ является решение уравнения (16), заданным формулой

$$V^{L}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = (N^{-1/2})\, \mathrm{th}^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\, \mathrm{ch}^{-(L+p+q-2)}(\theta) \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\frac{1}{2}(p+q-2+l_{\{p/2\}}+\tilde{l}_{\{q/2\}}+L),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(L+q+\tilde{l}_{\{q/2\}}-l_{\{p/2\}});\ \tilde{l}_{\{q/2\}}+\frac{q}{2};\ \mathrm{th}^2\theta\right], \tag{24}$$

где для заданного представления L фиксировано, а $l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ ограничены тем условием, что ${}_2F_1$ — полином, т. е.

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} = L + q + 2 \cdot, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

В формуле (24) N — нормировочный множитель, заданный формулой

$$N = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} - L - q + 2\right)\right]\Gamma\left(\tilde{l}_{\{q/2\}} + q/2\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(L - \tilde{l}_{\{q/2\}} + l_{\{p/2\}} + p\right)\right]}{2\left[L + \frac{1}{2}(p + q - 2)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}} + L + p + q - 2\right)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}} - L\right)\right]}. \tag{26}$$

Пусть $\hat{H}(L)$, где L фиксировано, обозначает подпространство в $H = L^2(H^{p,q}, \mu)$, натянутое на гармонические функции (23). Поскольку

$$[\Delta(H^{p,q}), Z_{ij}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p + q,$$

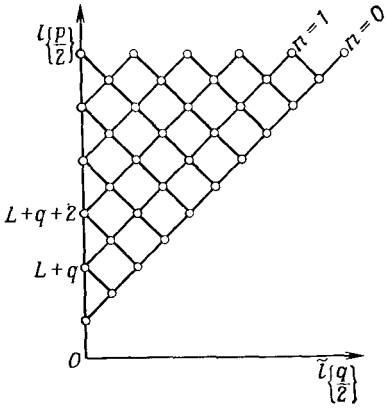
для любого генератора $Z_{ij} \in \mathrm{so}(p, q)$, пространство $\hat{H}(L)$ является инвариантным пространством для квазирегулярного представления (1.1). Унитарное представление (1.1), ограниченное на $\hat{H}(L)$, мы обозначим через $\hat{T}(L)$.

Структура пространства представления $\hat{H}(L)$ может быть проиллюстрирована графически решеткой в плоскости $(l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}})$. Используя соотношение (25), мы получаем диаграмму, показанную на фиг. 1. Каждый узел решетки на фиг. 1 представляет собой конечномерное подпространство $\tilde{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ неприводимого представления максимальной компактной подгруппы $\mathrm{SO}(p) \otimes \mathrm{SO}(q)$, которое определяется парой целых чисел $l_{\{p/2\}}$ и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$. Генераторы $L_{ij} \in \mathrm{SO}(p) \otimes \mathrm{SO}(q)$ действуют внутри $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$. С другой стороны, генераторы B_{ij} некомпактного типа отображают подпространство $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ в четыре соседних подпространства $\hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}} \pm 1, \tilde{l}_{\{q/2\}} \pm 1}$. Интересно, что структура всего пространства представления определяется наинизшим значением $l_{\{p/2\}}$.

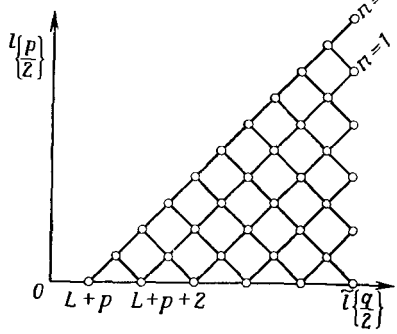
Множество всех представлений

$$\hat{T}(L), \quad L = -\left\{\frac{1}{2}(p + q) - 4\right\}, \quad -\left\{\frac{1}{2}(p + q) - 4\right\} + 1, \ldots,$$

составляет дискретную серию наиболее вырожденных унитарных представлений группы $SO_0(p, q)$, которые реализуются в гильбертовых пространствах $L^2(H^{p,q}, \mu)$. Пусть $\tilde{H} = L^2(H^{q,p}, \mu)$. Существует также дискретная серия представлений $\tilde{T}(L)$ на гильбертовом пространстве $\tilde{H}(L) \subset \tilde{H}$, натянутом на гармонические функции, полученные перестановкой в (22) p и $l_{\{p/2\}}$ с q и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ соответственно. Представления $\hat{\tilde{T}}(L)$ группы $SO_0(p, q)$,



Фиг. 1. Представления $\hat{T}(L)$ в $L^2(H^{p,q}, \mu)$ при $p \geqslant q > 2$.



Фиг. 2. Представления $\hat{T}(L)$ в $L^2(H^{p,q}, \mu)$ при $p \geqslant q > 2$.

реализованные в $\tilde{H}(L)$, не являются унитарно эквивалентными представлениям $\tilde{T}(L)$ в $\hat{H}(L)$, за исключением случая $p = q$, в котором оба гильбертовы пространства совпадают. Структура пространства представления $\hat{\tilde{T}}(L)$ иллюстрируется графически на фиг. 2.

Дифференциальный оператор (16) и, следовательно, оператор Лапласа—Бельтрами (1) в случае группы $SO_0(p, q)$ имеет дискретный спектр, заданный формулой (20), а также непрерывный спектр. Последний имеет вид [525]

$$\hat{\Delta}(\lambda) = +\lambda^2 + \left(\frac{p+q-2}{2}\right)^2, \quad \lambda \in [0, \infty]. \tag{27}$$

Для непрерывного спектра регулярное в начальной точке решение уравнения (16) задается функцией

$$V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta) = (N^{-1/2})\,\mathrm{th}^{|\tilde{l}_{\{q/2\}}|}\theta\,\mathrm{ch}^{[-(p+q-2)/2+i\lambda]}\theta \times$$
$$\times {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}\left[\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right| + |l_{\{p/2\}}| - i\lambda + \frac{1}{2}(p+q-2)\right],\right.$$

$$\frac{1}{2}\left[\left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right| - \left|l_{\{p/2\}}\right| - i\lambda + \frac{1}{2}(q-p+2)\right];$$

$$\left|l_{\{q/2\}}\right| + \frac{1}{2}q;\ \operatorname{th}^2\theta\Big\} \qquad (28)$$

где

$$N = \left|\frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\left|\tilde{l}_{\{q/2\}} + \frac{1}{2}q\right|\right)\Gamma(i\lambda)}{\begin{array}{l}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left[i\lambda + \left|l_{\{p/2\}}\right| + \left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right| + \frac{1}{2}(p+q-2)\right]\right\}\times \\ \times\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left[i\lambda + \left|\tilde{l}_{\{q/2\}}\right| - \left|l_{\{p/2\}}\right| + \frac{1}{2}(q-p+2)\right]\right\}\end{array}}\right|^2.$$

Эти функции удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\,\overline{V^{\lambda'}_{l_{\{p/2\}},\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)}\,d\mu(\theta) = \delta(\lambda-\lambda'), \qquad (29)$$

где $d\mu(\theta)$ задается формулой (17).

Ортогональные собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами $\Delta(H^{p,q})$ являются гармоническими функциями вида

$$Y^{\lambda,\,l_2,\,\ldots,\,l_{\{p/2\}},\,\tilde{l}_2,\,\ldots,\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}_{m_1,\,\ldots,\,m_{[p/2]},\,\tilde{m}_1,\,\ldots,\,\tilde{m}_{[q/2]}}(0,\omega,\tilde{\omega}) =$$

$$= V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)\,Y^{l_2,\,\ldots,\,l_{\{p/2\}}}_{m_1,\,\ldots,\,m_{[p/2]}}(\omega)\,Y^{\tilde{l}_2,\,\ldots,\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\,\ldots,\,\tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega}), \qquad (30)$$

где $V^{\lambda}_{l_{\{p/2\}},\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}(\theta)$ приведены в (28), а

$$Y^{l_2,\,\ldots,\,l_{\{p/2\}}}_{m_1,\,\ldots,\,m_{[p/2]}}(\omega) \quad \text{и} \quad Y^{\tilde{l}_2,\,\ldots,\,\tilde{l}_{\{q/2\}}}_{\tilde{m}_1,\,\ldots,\,\tilde{m}_{[q/2]}}(\tilde{\omega})$$

— собственные функции операторов $\Delta(S^{p-1})$ и $\Delta(S^{q-1})$ соответственно. В силу свойства ортогональности (29) на множество собственных функций (30), сопоставляемых с определенной точкой λ непрерывной части спектра, натягивается не гильбертово подпространство[1]) $\widehat{H}(\lambda)$ пространства $\widehat{H}$, а изоморфное ему пространство $H'(\lambda) \subset \Phi'(H^{p,q})$.

Оказывается, что множество инвариантных операторов алгебры so (p, q) на H содержит инвариантный оператор, который не содержится в обертывающей алгебре алгебры so (p, q). А именно, оператор отражения R, определенный формулой

$$Rf(x) = f(-x), \quad f(x) \in H, \qquad (31)$$

[1]) В нашем случае $\widehat{H}(\lambda)$ представляет собой l^2, т. е. гильбертово пространство последовательностей. Векторы $\widehat{e}_k(\lambda)$ являются последовательностями типа (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) с единицей на k-м месте и нулями на других местах.

коммутирует со всеми генераторами алгебры so (p, q) и, следовательно, представляет собой инвариантный оператор [1]). В случае дискретной серии представлений $\widehat{T}^L$ собственное значение p оператора отражения R определяется инвариантным числом L, т. е.[2])

$$\begin{aligned} RY^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} &= (-1)^{L+q} Y^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} \quad \text{при} \quad Y^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} \in H(H^{p,\, q},\ \mu), \\ RY^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} &= (-1)^{L+p} Y^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} \quad \text{при} \quad Y^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}} \in H(H^{q,\, p},\ \mu). \end{aligned} \tag{32}$$

Однако в случае непрерывной серии представлений собственные функции (30) оператора Δ $(H^{p,\, q})$, принадлежащие определенному собственному значению λ, являются собственными векторами оператора R с собственными значениями

$$r = (-1)^{l\{p/2\} + \tilde{l}\{q/2\}}. \tag{33}$$

Следовательно, множество функций $\left\{Y^{\lambda,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}}\right\}$ разбивается на два подмножества

$$\left\{Y^{\lambda,\, +,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{Y^{\lambda,\, -,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}}\right\},$$

на которые натягиваются инвариантные линейные подпространства для алгебры so (p, q).

Дадим теперь общий вид гармонического анализа на однородных пространствах для рассматриваемого частного случая (см. теорему 2.1). В нашем случае разложение (2.1) пространства $H = L^2(H^{p,\, q},\ \mu)$ в прямой интеграл $\widehat{H}$ определяется множеством инвариантных операторов $\{\Delta,\ R\}$ и имеет вид

$$H \xrightarrow{F} \widehat{H} = \sum_{L = -\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}}^{\infty} \widehat{H}(L,\ (-1)^{L+q}) + \sum_{\pm} \int_0^{\infty} \widehat{H}(\lambda,\ \pm)\, d\lambda. \tag{34}$$

В качестве ядерного пространства $\Phi \subset H$ можно взять пространство Шварца S на X. Пространство Φ является плотной инвариантной областью определения инвариантных операторов Δ $[SO_0(p, q)]$ и R, а также всех генераторов компактного и некомпактного типа.

Изоморфизм F из (34) задается с помощью обобщенного преобразования Фурье относительно собственных функций (22) и (30),

---

[1]) Существование инвариантного оператора R не противоречит теореме Хелгасона, которая утверждает, что кольцо инвариантных операторов в обертывающей алгебре алгебры so (p, q) на симметрическом пространстве ранга один порождается оператором Лапласа—Бельтрами.

[2]) Ниже для гармонических функций (22) и (30) мы используем сокращенные обозначения $Y^{L,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}}$, $Y^{\lambda,\, l,\, \tilde{l}}_{m,\, \tilde{m}}$.

соответствующих дискретной и непрерывной частям спектра инвариантных операторов Δ $[SO_0(p, q)]$ и R:

$$H \supset \Phi \ni \psi(x) \xrightarrow{F} \{(F\psi)(\lambda, r)\} = \{\hat{\psi}(\lambda, r)\}, \tag{35}$$

где $\lambda = L$ или λ и r равны ± 1. Для заданного λ вектор $\hat{\psi}(\lambda, r)$ является элементом гильбертова пространства l^2, компоненты $\hat{\psi}^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}{}^{l, \tilde{l}}$ которого задаются формулой

$$\hat{\psi}^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}{}^{l, \tilde{l}} = \left\langle \psi, Y^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}{}^{l, \tilde{l}} \right\rangle = \int\limits_{H^{p, q}} \psi(\theta, \omega, \tilde{\omega}) \overline{Y^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}{}^{l, \tilde{l}}} d\mu(\theta, \omega, \tilde{\omega}). \tag{36}$$

Используя (2.4)—(2.6), легко получить формулу спектрального синтеза и равенство Парсеваля для рассматриваемого случая.

Действие любого генератора $Z_{ij} \in so(p, q)$ в гильбертовом пространстве $H(\lambda, r)$ задается формулой

$$Z_{ij}\hat{\psi}^{\lambda, r} \equiv \left\{\left\langle Z_{ij}\psi, Y^{\lambda, r}_{m, \tilde{m}}\right\rangle\right\}, \quad \psi \in \Phi. \tag{37}$$

Доказательство неприводимости пространств $H(L, \pm)$ и $\hat{H}(L, \pm)$ относительно действия (37) алгебры Ли $so(p, q)$ простое, и мы его опускаем. (Детали см. в [525].)

Гармонические функции на гиперболоиде $H^{q,p}$ могут быть получены заменой в (22) и (30) p и $l_{\{p/2\}}$ на q и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$ соответственно и наоборот.

Непрерывная серия неприводимых унитарных представлений $\hat{T}(\lambda)$ группы $SO_0(p, q)$, $p \geqslant q > 1$, на $H = L^2(H^{q,p}, \mu)$ может быть построена тем же методом, что и в описанном случае.

Б. *Разложение относительно максимальной компактной и максимальной некомпактной подгрупп*

Разложение неприводимого представления группы $SO_0(p, q)$ на неприводимые представления максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$ легко получается из фиг. 1 и 2. Например, для дискретных представлений $\hat{T}(L)$ пространство $\hat{H}(L)$ представляется в виде прямой суммы

$$\hat{H}(L) = \sum_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}} \oplus \hat{H}^{(L)}_{l_{\{p/2\}}, \tilde{l}_{\{q/2\}}}, \tag{38}$$

где суммирование ведется по всем $l_{\{p/2\}}$ и $\tilde{l}_{\{q/2\}}$, удовлетворяющим условию

$$l_{\{p/2\}} - \tilde{l}_{\{q/2\}} = L + 2n + q, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и каждое конечномерное пространство $H^{(L)}_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}}$ содержится с единичной кратностью. Таким образом, для $g \in SO(p) \otimes SO(q)$ имеем

$$\hat{T}_g(L) = \sum_{l_{\{p/2\}},\, \tilde{l}_{\{q/2\}}} \oplus \hat{T}_g^{l_{\{p/2\}}} \otimes T_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}, \tag{39}$$

где $T_g^{l_{\{p/2\}}} \left(T_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}\right)$ — симметрические конечномерные представления группы $SO(p)$ $[SO(q)]$, определенные старшим весом m вида [см. (10.3.29)]

$$m = (l_{\{p/2\}},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0). \tag{40}$$

Каждое представление $\hat{T}_g^{l_{\{p/2\}}} \otimes \hat{T}_g^{\tilde{l}_{\{q/2\}}}$ содержится в разложении (40) с единичной кратностью.

Разложение представлений $\hat{T}(\lambda, +)$ и $\hat{T}(\lambda, -)$ непрерывной серии имеет тот же вид, что и в случае дискретной серии $\hat{T}(L)$, только суммирование в (39) и (40) ведется по всем $l_{\{p/2\}} + \tilde{l}_{\{q/2\}}$, четным или нечетным соответственно.

В физических задачах, в которых существует некомпактная группа высших симметрий, нас также интересует разложение заданного неприводимого представления некомпактной группы на неприводимые представления максимальной некомпактной подгруппы. В случае группы $SO_0(p, q)$ мы можем выполнить это разложение, если на многообразии $H^{p,q}$ введем бигармоническую систему координат, в которой оператор Лапласа — Бельтрами Δ $[SO_0(p, q-1)]$ диагонален. Такая бигармоническая система координат задается в виде

$$\begin{gathered} x^i = x'^i \operatorname{ch}\eta, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p+q-1, \quad p \geqslant q > 2, \\ x^{p+q} = \operatorname{sh}\eta, \quad \eta \in (-\infty,\ \infty), \end{gathered} \tag{41}$$

где x'^i — бигармонические координаты на гиперболоиде $H^{p,\,q-1}$, заданном формулой (9). Используя формулу (1.12), находим, что в системе координат (41) оператор Лапласа—Бельтрами имеет вид

$$\Delta(H^{p,q}) = \frac{-1}{\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \operatorname{ch}^{p+q-2}\eta \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\Delta(H^{p,\,q-1})}{\operatorname{ch}^2\eta}. \tag{42}$$

Здесь $\Delta(H^{p,\,q-1})$ — оператор Лапласа—Бельтрами группы $SO_0(p, q-1)$, связанный с гиперболоидом $H^{p,\,q-1}$. Ясно, что дискретные и непрерывные части спектров операторов $\Delta(H^{p,q})$ и $\Delta(H^{p,\,q-1})$ являются такими же, как и в разделе А. Если мы представим собственные функции оператора $\Delta(H^{p,q})$ в виде

произведения собственной функции оператора $\Delta(H^{p,q-1})$ и функции $V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, то получим следующее дифференциальное уравнение для последней функции:

$$\left[\frac{-1}{\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta}\frac{d}{d\eta}\operatorname{ch}^{p+q-2}\eta\frac{d}{d\eta}-\frac{\tilde{L}(\tilde{L}+p+q-3)}{\operatorname{ch}^2\eta}+L(L+p+q-2)\right]\times$$
$$\times V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=0. \tag{43}$$

Используя замену $V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=\operatorname{ch}^{(2-p+q)/2}\eta\cdot\psi_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, получим для $\psi_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$ дифференциальное уравнение того типа, которое рассматривалось Титчмаршем ([807], § 4, 19). Следовательно, мы знаем, что оба независимые решения ${}_{(\alpha)}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$, $\alpha=1, 2$, входят в разложение по собственным функциям, соответствующим дифференциальному оператору (43). Конечное решение уравнения (43) для того случая, когда спектры операторов $\Delta(H^{p,q})$ и $\Delta(H^{p,q-1})$ дискретны, записываются в виде

$${}_{(\alpha)}Y_{m\tilde{m}\Omega}^{L\tilde{L}l\tilde{l}}={}_{\alpha}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)\,Y_{m\tilde{m}}^{\tilde{L}l\tilde{l}}(\theta,\ \omega,\ \tilde{\omega}),\qquad \alpha=1,\ 2, \tag{44}$$

где

$$\begin{aligned} L&=L+(2n+3-\alpha),\qquad n=0,\ 1,\ 3,\ \ldots,\\ \tilde{L}&=-\left\{\frac{1}{2}(p+q-4)\right\}+k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots. \end{aligned} \tag{45}$$

Функции ${}_{(\alpha)}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)$ могут быть выражены через полиномы Гегенбауэра:

$${}_{\alpha}V_{\tilde{L}}^{L}(\eta)=\frac{(-1)^{(\tilde{L}-L+1-\alpha)}}{\sqrt{{}_{\alpha}M}}\operatorname{ch}^{-(L+p-1)}\eta\,C_{\tilde{L}-L-1}^{L+p/2}(\eta),\qquad \alpha=1,\ 2, \tag{46}$$

где

$${}_{(1)}M=\frac{{}_{(1)}N\cdot\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(L+L+p)\right]}{\Gamma^2\left(L+\frac{1}{2}p\right)\Gamma^2\left[\frac{1}{2}p(\tilde{L}-L)\right]},$$

$${}_{(2)}M=\frac{{}_{(2)}N\cdot 4\cdot\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(L+\tilde{L}+p+1)\right]}{(L+\tilde{L}+p-1)^2\Gamma^2\left(L+\frac{1}{2}p\right)\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L+1)\right]},$$

$${}_{(\alpha)}N=\frac{2\pi\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L+\alpha-1)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}+L+p+q+\alpha-3)\right]}{(2L+p+q-2)\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}+L+p+q-\alpha)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{L}-L-\alpha+2)\right]}.$$

Решения, соответствующие непрерывным частям спектров инвариантных операторов $\Delta(H^{p,q})$ и $\Delta(H^{p,q-1})$, находятся подобным же образом (см. [524]).

Форма (44) гармонических функций для группы $SO_0(p, q)$ предполагает, что пространство представления $\hat{H}(L)$ имеет следующую структуру:

$$H(L) = \sum_{\tilde{L}=L+1}^{\infty} \oplus H(L, \tilde{L}), \tag{47}$$

где $\hat{H}(L, \tilde{L})$ — бесконечномерное пространство, на котором реализуется неприводимое представление $\hat{T}(L, \tilde{L})$ группы $SO_0(p, q-1)$. Пространство $\hat{H}(L, \tilde{L})$ натягивается на гармонические функции (22) с фиксированными L и $\tilde{L}$. Разложение представления $\hat{T}(L)$ имеет вид

$$g \in SO_0(p, q-1), \quad \hat{T}_g(L) = \sum_{\tilde{L}=L+1}^{\infty} \oplus \hat{T}_g(L, \tilde{L}).$$

В. *Максимальное множество коммутирующих операторов и их спектры*

Наиболее вырожденные представления $\hat{T}(L)$, $\tilde{T}(L)$ и $\hat{T}(L, \pm)$, $\tilde{T}(\Lambda, \pm)$ дискретной и непрерывной серий группы $SO_0(p, q)$ особенно удобны для приложений в физических задачах. Причина кроется в следующих фактах.

1. Для этих представлений групп $SO_0(p, q)$ максимальное множество коммутирующих операторов максимально уменьшено, т. е. для дискретных наиболее вырожденных представлений группы $SO_0(p, q)$ максимальное множество независимых коммутирующих операторов обертывающей алгебры состоит из

$$\Delta[SO(p, q)], \ R,$$

$$C_p \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \Delta[SO(p)], \Delta[SO(p-2)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \text{для } p \text{ четных} \\ \Delta[SO(p)], \Delta[SO(p-1)], \Delta[SO(p-3)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \\ & \text{для } p \text{ нечетных} \end{array} \right\}, \tag{48}$$

$$\tilde{C}_q \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \Delta[SO(q)], \Delta[SO(q-2)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \text{для } q \text{ четных} \\ \Delta[SO(q)], \Delta[SO(q-1)], \Delta[SO(q-3)], \ldots, \Delta[SO(4)] & \\ & \text{для } q \text{ нечетных} \end{array} \right\},$$

$$H = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \ \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}^l}, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2} p\right] \\ l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2} q\right] \end{array} \right\},$$

где $\Delta[SO(p, q)]$ представляет собой оператор Казимира второго порядка группы $SO(p, q)$, а C_p и $\tilde{C}_q$ — последовательность соот-

ветствующих операторов Казимира для максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$. Множество H состоит из операторов подалгебры Картана, за исключением случая, когда p и q нечетные; в последнем случае H представляет собой максимальную абелеву компактную подалгебру алгебры $SO_0(p, q)$. Следует заметить, что оператор отражения R, который не лежит в обертывающей алгебре для $SO_0(p, q)$, необходим для характеристики неприводимых представлений непрерывной серии.

Число операторов, содержащихся в максимальном множестве коммутирующих операторов обертывающей алгебры для дискретных наиболее вырожденных представлений группы $SO_0(p, q)$, равно

$$N = p + q - 1, \tag{49}$$

а соответствующее число для основных невырожденных представлений равно

$$N' = \frac{1}{2}(r + l) = \frac{1}{4}[N(N+1) + 2l],$$

где r и l — размерность и ранг группы $SO_0(p, q)$ соответственно.

2. Дополнительные квантовые числа можно связать с собственными значениями операторов из H. Оказывается, что множество H наибольшее в использованной нами бигармонической системе координат.

3. Собственные функции максимального коммутирующего множества операторов задаются в явном виде формулами (22) и (30); область значений чисел L, $l_2, \ldots, l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_2, \ldots, \tilde{l}_{\{q/2\}}$, $m_1, \ldots, m_{[p/2]}$, $\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{[q/2]}$, которые могут играть роль квантовых чисел, определяется формулами (19), (21) и (10.3.22) соответственно.

Основной заслугой этого метода является перевод некоторых трудных задач теории представлений локально компактных групп Ли на язык сравнительно простой теории дифференциальных уравнений второго порядка. Этот метод также может быть применен для явного построения менее вырожденных представлений, которые определяются двумя, тремя, ..., k ($k \leqslant n$, где n — ранг группы $SO_0(p, q)$) инвариантными числами.

§ 4. Обобщенные проективные операторы

В гл. 7, § 3 мы рассмотрели формализм проективных операторов P^{λ}_{pq}, которые использовались для эффективного решения различных задач теории представлений компактных групп и физики частиц. Операторы P^{λ}_{pq} определялись формулами

$$P^{\lambda}_{pq} = d_{\lambda} \int_G \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x^{-}\, d\mu(x). \tag{1}$$