ветствующих операторов Казимира для максимальной компактной подгруппы $SO(p) \otimes SO(q)$. Множество H состоит из операторов подалгебры Картана, за исключением случая, когда p и q нечетные; в последнем случае H представляет собой максимальную абелеву компактную подалгебру алгебры $SO_0(p, q)$. Следует заметить, что оператор отражения R, который не лежит в обертывающей алгебре для $SO_0(p, q)$, необходим для характеристики неприводимых представлений непрерывной серии.

Число операторов, содержащихся в максимальном множестве коммутирующих операторов обертывающей алгебры для дискретных наиболее вырожденных представлений группы $SO_0(p, q)$, равно

$$N = p + q - 1, \tag{49}$$

а соответствующее число для основных невырожденных представлений равно

$$N' = \frac{1}{2}(r + l) = \frac{1}{4}[N(N+1) + 2l],$$

где r и l — размерность и ранг группы $SO_0(p, q)$ соответственно.

2. Дополнительные квантовые числа можно связать с собственными значениями операторов из H. Оказывается, что множество H наибольшее в использованной нами бигармонической системе координат.

3. Собственные функции максимального коммутирующего множества операторов задаются в явном виде формулами (22) и (30); область значений чисел L, $l_2, \ldots, l_{\{p/2\}}$, $\tilde{l}_2, \ldots, \tilde{l}_{\{q/2\}}$, $m_1, \ldots, m_{[p/2]}$, $\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{[q/2]}$, которые могут играть роль квантовых чисел, определяется формулами (19), (21) и (10.3.22) соответственно.

Основной заслугой этого метода является перевод некоторых трудных задач теории представлений локально компактных групп Ли на язык сравнительно простой теории дифференциальных уравнений второго порядка. Этот метод также может быть применен для явного построения менее вырожденных представлений, которые определяются двумя, тремя, ..., k ($k \leqslant n$, где n — ранг группы $SO_0(p, q)$) инвариантными числами.

§ 4. Обобщенные проективные операторы

В гл. 7, § 3 мы рассмотрели формализм проективных операторов P^{λ}_{pq}, которые использовались для эффективного решения различных задач теории представлений компактных групп и физики частиц. Операторы P^{λ}_{pq} определялись формулами

$$P^{\lambda}_{pq} = d_{\lambda} \int_G \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x^{-}\, d\mu(x). \tag{1}$$

При попытке распространить формулу (1) на некомпактные группы встречаются следующие трудности:

1) матричные элементы $D^{\lambda}_{pq}(x)$ являются распределениями из $\Phi'(G)$,

2) объем $\int\limits_G dx$ бесконечен.

Поэтому должен быть выяснен смысл интеграла (1). Как иллюстрацию рассмотрим сначала случай абелевой векторной группы G. В этом случае $D^{\lambda}_{pq}(X)$ сводится к $\exp(ipx)$ и интеграл (1) принимает вид

$$P^{\lambda} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \exp(-i\lambda x)\, T_x\, dx, \tag{2}$$

где $x \to T_x$ — регулярное представление группы G. Для $\varphi(x) \in \Phi(G)$ имеем

$$(P^{\lambda}\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \exp(-i\lambda x')\, \varphi(x + x')\, dx' =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \exp(i\lambda x) \int\limits_G \exp(-i\lambda y)\, \varphi(y)\, dy =$$

$$= \exp(i\lambda x)\, \hat{\varphi}(\lambda) \in H(\lambda) \subset \Phi'.$$

Таким образом, P^{λ} представляет собой отображение из $\Phi(G)$ в $\Phi'(G)$, т. е. он является операторнозначным распределением. Чтобы быть точным, необходимо сначала рассмотреть величину

$$P^{\lambda}_N = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{G_N} \exp(-i\lambda x)\, T_x\, dx, \tag{3}$$

где G_N — компактное подмножество в G и $\lim\limits_{N\to\infty} G_N = G$. Так как $\exp(-i\lambda x)\, T_x$ — непрерывная функция на G и G_N имеет конечную меру Хаара, то интеграл (3) определен. Более того, мы имеем

$$(P^{\lambda}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} (P^{\lambda}_N\varphi)(x) = \exp(i\lambda x)\, \hat{\varphi}(\lambda),$$

где предел взят в топологии пространства $\Phi'(G)$. Следовательно, мы видим, что величина P^{λ}, заданная формулой (2), определена для некомпактных абелевых векторных групп как слабый предел операторов, заданных формулой (3), т. е.

$$P^{\lambda} = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{G_N} \exp(-i\lambda x)\, T_x\, dx.$$

Если G — векторная группа, то пространство Λ индексов λ, определяющих неприводимые представления группы G, также

является векторной группой. Рассмотрим пространство Шварца $D(\Lambda)$ функций с носителем в Λ. Тогда для $f \in D(\Lambda)$ можно определить «сглаженный» оператор $P(f)$ вида

$$P(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) P^{\lambda} d\lambda. \tag{4}$$

Для $u \in \Phi(G)$ имеем

$$\|P(f)u\| \leqslant \max_{\lambda \in \widehat{G}} |f(\lambda)| \|u\|_H.$$

Это означает, что $P(f)$ — плотно определенный ограниченный оператор в $H(G)$.

Легко проверить, что

$$P(f_1)P(f_2) = P(f_1 f_2).$$

Это равенство можно записать в виде произведения операторнозначных распределений:

$$P^{\lambda} P^{\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda') P^{\lambda}.$$

Это обобщение на некомпактные группы соотношений ортогональности (7.3.3).

Следовательно, мы видим, что для удобного описания проективных операторов для некомпактных групп нам следует использовать технику операторнозначных распределений. Поэтому мы начинаем с обзора основных понятий, касающихся операторнозначных распределений в гильбертовом пространстве.

Пусть $H = L^2(\Lambda)$, где Λ — подмножество n-мерного пространства R^n Евклида или Минковского. Пусть $K(\Lambda)$ — пространство пробных функций (т. е. пространство Шварца $D(\Lambda)$ или $S(\Lambda)$).

Определение 1. *Операторнозначное распределение* P — это отображение $f \to P(f)$, $f \in K(\Lambda)$, со значениями в множестве линейных операторов на H, удовлетворяющее следующим условиям:

1° Операторы $P(f)$ и $P(f)^*$, $f \in K(\Lambda)$, имеют общую плотную область определения D, которая является линейным подмножеством в H, таким, что

$$P(f)D \subset D, \quad P(f)^* D \subset D. \tag{5}$$

2° На области D $P(f)$ удовлетворяет условиям

$$P(\alpha f) = \alpha P(f),$$

$$P(f_1 + f_2) = P(f_1) + P(f_2),$$

где $\alpha \in C^1$ и $f_1, f_2 \in K(\Lambda)$.

3° $P(f)$ слабо непрерывно на $K(\Lambda)$, т. е. если $u, v \in D$ и $f \to 0$, то

$$(P(f)u, v) \to 0. \tag{6}$$

Операторнозначное распределение $f \to P(f)$ иногда может быть записано в виде интеграла

$$P(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) P(\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{7}$$

Символ $P(\lambda)$ часто имеет прямое значение и также называется *операторнозначным распределением.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сопряжение* $P^*(\lambda)$ *операторнозначного распределения* $P(\lambda)$ — это такое операторнозначное распределение, которое пробной функции $f(\lambda)$ из $K(\Lambda)$ предписывает оператор $[P(\bar{f})]^*$, т. е.

$$P^*(f) \equiv \int_{\Lambda} f(\lambda) P^*(\lambda) \mathrm{d}\lambda \equiv [P(\bar{f})]^* = \left[\int_{\Lambda} \overline{f(\lambda)} P(\lambda) \mathrm{d}\lambda\right]^*. \tag{8}$$

Операторнозначное распределение *вещественно*, если $P(\lambda)^* = P(\lambda)$.

Пусть G — локально компактная группа Ли, для которой справедливы условия теоремы 14.2.1, т. е. G — полупростая группа Ли, группа движений пространства Евклида или Минковского и т. д. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — «+»-симметрические генераторы центра $Z(E)$ обертывающей алгебры E группы G, и пусть $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ — соответствующие самосопряженные инвариантные операторы. Пусть $H = L^2(G)$, и пусть $\Phi(G) \subset H \subset \Phi'(G)$ — триплет Гельфанда, такой, что все $\bar{C}_i$ непрерывно отображают Φ в Φ. Пусть $\{D^{\lambda}_{pq}(x)\}$ — множество обобщенных собственных функций операторов $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$, заданных теоремой 14.2.1, которые удовлетворяют соотношениям полноты (14.2.35) и ортогональности (14.2.34) и дают разложение (14.2.36) любого элемента φ из $\Phi(G)$.

Введем величину

$$P^{\lambda}_{pq} = \rho(\lambda) \int_{G} \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)} T_x \mathrm{d}x, \tag{9}$$

где T_x — правое регулярное представление, т. е.

$$(T_x\varphi)(y) = \varphi(yx), \tag{10}$$

и $\rho(\lambda)$ — спектральная мера, соответствующая инвариантным операторам $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ группы G.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Величина* P^{λ}_{pq}, *заданная формулой* (9), *представляет собой операторнозначное распределение на пространстве* $H = L^2(G)$ *и отображает* $\Phi(G)$ *в* $\Phi'(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P^{\lambda}_{pqN} = \rho(\lambda) \int_{G_N} \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)} T_x \mathrm{d}x, \tag{11}$$

где G_N — компактное подмножество в G и $\lim\limits_{N\to\infty} G_N = G$. Так как $\overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x$ непрерывна на G, то интеграл (11) определяет оператор в H. При $\varphi \in \Phi(G)$ имеем

$$\left(P^{\lambda}_{pqN}\varphi\right)(y) = \rho(\lambda) \int\limits_{G_N} \mathrm{d}x \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)} (T_x\varphi)(y) = \rho(\lambda) \int\limits_{yG_N} \mathrm{d}z \overline{D^{\lambda}_{pq}(y^{-1}z)}\, \varphi(z) =$$

$$= \rho(\lambda) \sum_r \overline{D^{\lambda}_{pr}(y^{-1})} \int\limits_{yG_N} \mathrm{d}z\, \overline{D^{\lambda}_{rq}(z)}\, \varphi(z) \to$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho(\lambda) \sum_r D^{\lambda}_{rp}(y)\, \widehat{\varphi}_{rq}(\lambda). \qquad (12)$$

Перестановка интегрирования и суммирования в (12) оправдана теоремой Фубини—Тонелли, если $\varphi \in L^1(G)$. В самом деле,

$$\sum_r \overline{D^{\lambda}_{pr}(y^{-1})\, D^{\lambda}_{rq}(z)}\, \varphi(z)\Big|^2 \leqslant |\varphi(z)|^2 \sum_r \left|\overline{D^{\lambda}_{pr}(y^{-1})}\right|^2 \sum_{r'} \left|\overline{D^{\lambda}_{rq}(z)}\right|^2 = |\varphi(z)|^2,$$

так как, например,

$$\sum_r \left|\overline{D^{\lambda}_{pr}(z)}\right|^2 = \sum_r \langle e_p, T^{\lambda}_z e_r\rangle_{\widehat{H}(\lambda)} \langle T^{\lambda}_z e_r, e_p\rangle_{\widehat{H}(\lambda)} = 1.$$

Мы видим, что, так же как и для абелевых векторных групп, имеем

$$P^{\lambda}_{pq} = \lim_{N\to\infty} \rho(\lambda) \int\limits_{G_N} \mathrm{d}x \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, T_x \qquad (13)$$

в смысле слабого предела операторов $\left(P^{\lambda}_{pq}\right)_N$. Выражение (4.12) показывает, что для любого $\varphi(y)$ из $\Phi(G)$ величина $\left(P^{\lambda}_{pq}\varphi\right)(y)$ является элементом $\varphi(\lambda, y) \in H(\lambda) \subset \Phi'(G)$. Следовательно, согласно формуле (3) приложения Б, $P^{\lambda}_{pq}\varphi$ является обобщенным собственным вектором инвариантных операторов $C_1, \ldots, C_n$. Таким образом, область определения $D\left(P^{\lambda}_{pq}\right)$ оператора P^{λ}_{pq} в $H = L^2(G)$ состоит только из нулевого вектора и, следовательно, P^{λ}_{pq} не может рассматриваться как оператор в H. Однако, если $f(\lambda)$ является элементом пространства $C_0(\Lambda)$ непрерывных функций на Λ, то сглаженный оператор

$$P_{pq}(f) = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\, P^{\lambda}_{pq}\, \mathrm{d}\lambda \qquad (14)$$

представляет собой ограниченный линейный оператор. В самом деле, для $\varphi \in \Phi(G)$ из (12) получаем

$$P_{pq}(f)\,\varphi(y) = \int\limits_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda f(\lambda)\, \rho(\lambda) \sum_r D^{\lambda}_{rp}(y)\, \widehat{\varphi}_{rq}(\lambda).$$

Используя равенство Планшереля (14.2.17), получаем

$$\|P_{pq}(f)\varphi\|^2 = \int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \sum_r \hat{\varphi}_{rq}(\lambda)\overline{\hat{\varphi}_{rq}(\lambda)}\rho(\lambda)\,d\lambda \leqslant \max_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2\|\varphi\|^2,$$

т. е.

$$\|P_{pq}(f)\varphi\| \leqslant \max_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|\,\|\varphi\|. \tag{15}$$

Так как операторы $P_{pq}(f)$ ограничены для любых $f \in C_0(\Lambda)$, то в роли общей плотной области определения D в определении 1 можно взять все пространство H. Тогда видно, что $P_{pq}(f)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° определения 1. Условие 3° следует из (15). В самом деле,

$$|(P_{pq}(f)\varphi, \psi)|^2 \leqslant \|P(f)\varphi\|^2\|\psi\|^2 \leqslant \max_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2\|\varphi\|^2\|\psi\|^2.$$

Поэтому $(P_{pq}(f)\varphi, \psi) \to 0$, когда $f \to 0$ в $C_0(\Lambda)$. Следовательно, мы видим, что отображения $P^\lambda_{pq}: \Phi(G) \to H(\lambda) \subset \Phi'(G)$, заданные формулой (13), представляют собой операторнозначные распределения на гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$.

Замечание. Если T_x — оператор левого сдвига в $L^2(G)$, то операторное распределение P^λ_{pq} следует брать в виде

$$P^\lambda_{pq} = \rho(\lambda)\int \overline{D^\lambda_{pq}(x)}\,T_{x^{-1}}\,dx. \tag{16}$$

Только при таком определении $(P^\lambda_{pq}\varphi)(y)$ представляет собой элемент $\varphi(\lambda, y)$ из $H(\lambda)$ [см. (12)].

Операторнозначное распределение P^λ_{pq} удовлетворяет определенным соотношениям эрмитовости и ортогональности, которые очень полезны для приложений. Действительно, мы имеем

Утверждение 2. *Пусть P^λ_{pq} — операторнозначное распределение, заданное формулой* (9). *Тогда*

$$(P^\lambda_{pq})^* = P^\lambda_{qp} \tag{17}$$

и

$$P^\lambda_{pq}P^{\lambda'}_{p'q'} = \delta(\lambda-\lambda')\,\delta_{qp'}P^\lambda_{pq'}. \tag{18}$$

Доказательство. Оператор $P^\lambda_{pq}(f)$ ограничен. Поэтому, согласно (7), (8), (12) и равенству Планшереля (14.2.17), для любых φ, ψ из $\Phi(G)$ получаем

$$(\varphi, P^{*\lambda}_{pq}(f)\psi) = (P^\lambda_{pq}(\bar{f})\varphi, \psi) = \left(\int d\lambda\overline{f(\lambda)}\,P^\lambda_{pq}\varphi, \psi\right) =$$

$$= \int d\lambda\overline{f(\lambda)}\,\rho(\lambda)\,\hat{\varphi}_{rq}(\lambda)\overline{\hat{\psi}_{rp}(\lambda)}.$$

Используя те же формулы, получаем, что последнее выражение равно $(\varphi, P^{\lambda}_{pq}(f)\psi)$. Поэтому

$$P^{*\lambda}_{pq}(f) = P^{\lambda}_{qp}(f), \tag{19}$$

и соотношение (17) следует из определения 1 и формулы (7).

Докажем теперь соотношение (18). Для любых f, g из $C_0(\Lambda)$ и φ, ψ из $L^2(G)$ формулы (19), (12) и равенство Планшереля (14.2.17) дают

$$\left(P^{\lambda}_{pq}(f) P^{\lambda}_{p'q'}(g)\varphi, \psi\right) = \left(P^{\lambda}_{p'q'}(g)\varphi, P^{\lambda}_{qp}(\bar{f})\psi\right) =$$

$$= \delta_{p'q} \int d\lambda f(\lambda) g(\lambda) \rho(\lambda) \widehat{\varphi}_{rq'}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}_{rp}(\lambda)}. \tag{20}$$

Легко проверить, что последнее выражение можно записать в виде

$$\left(\left\{\int_{\Lambda} f(\lambda') d\lambda' \int_{\Lambda} g(\lambda) d\lambda \delta(\lambda - \lambda') \delta_{p'q} P^{\lambda}_{pq'}\right\}\varphi, \psi\right).$$

Сравнивая его с первым выражением в (20), из утверждения 1 и формулы (7) получаем (18).

Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} имеют простые трансформационные свойства относительно действия группы G.

Утверждение 3. *Пусть P^{λ}_{pq} — операторнозначное распределение, заданное формулой* (9), *и пусть $x \in G$. Тогда*

$$T_x P^{\lambda}_{pq} = \sum_r D^{\lambda}_{rp}(x) P^{\lambda}_{rq}, \tag{21}$$

$$P^{\lambda}_{pq} T_x = \sum_r D^{\lambda}_{rq}(x) P^{\lambda}_{pr}. \tag{22}$$

Доказательство. Так как T_x непрерывно, то произведение $T_x P^{\lambda}_{pq}$ является операторнозначным распределением и $T_x P_{pq}(f)$ — ограниченный оператор в H (согласно утверждению 1). Используя формулу (9) и равенство Планшереля, получаем

$$\left(T_x P^{\lambda}_{pq}(f)\varphi, \psi\right) = \int_G dy \left(P^{\lambda}_{pq}(f)\varphi\right)(yx) \overline{\psi(y)} =$$

$$= \int_{\Lambda} d\lambda f(\lambda) \rho(\lambda) D^{\lambda}_{q'p}(x) \widehat{\varphi}_{p'q}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}_{p'q'}(\lambda)} =$$

$$= \left(\int_{\Lambda} d\lambda f(\lambda) D^{\lambda}_{q'p}(x') P^{\lambda}_{q'q}\varphi, \psi\right).$$

Сравнивая первое и последнее выражения этой цепочки равенств и используя определение 1 и формулу (7), получаем (21). Подобным же образом доказывается (22).

Из (21) и (22) также получаем

$$T_x P^{\lambda}_{pq} T_x^{-1} = D^{\lambda}_{rp}(x)\,\overline{D^{\lambda}_{sq}(x)}\,P^{\lambda}_{rs}. \tag{23}$$

Формула (23) означает, что P^{λ}_{pq} преобразуется как тензорный оператор, соответствующий тензорному произведению базисного вектора $e_p(\lambda)$ и вектора, сопряженного $e_q(\lambda)$ (т. е. как произведение $|\lambda : p\rangle\langle\lambda : q|$ в обозначении Дирака).

В некоторых случаях (например, в случае полупростых групп или группы Пуанкаре) характер $\chi^{\lambda}(x) = \mathrm{Tr}\, T_x(\lambda)$ является хорошо определенным распределением на G. В этом случае можно определить следующие операторнозначные распределения на $H = L^2(G)$:

$$P^{\lambda} = \rho(\lambda)\int_G dx\,\overline{\chi^{\lambda}(x)}\,T_x. \tag{24}$$

Так же как в утверждениях 2 и 3, можно проверить, что

$$(P^{\lambda})^* = P^{\lambda}, \tag{25}$$

$$P^{\lambda}P^{\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda')\,P^{\lambda}, \tag{26}$$

$$T_x P^{\lambda} = P^{\lambda} T_x. \tag{27}$$

Операторнозначные распределения P^{λ} полезны в приложениях. Если $H(X)$ — гильбертово пространство унитарного представления T группы G и $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — триплет Гельфанда, то P^{λ} проектирует Φ на обобщенное собственное пространство $H(\lambda) \subset \Phi'$. Пространство $P^{\lambda}\Phi$ (изоморфное $H(\lambda)$) инвариантно относительно T и по формуле (3.30) приложения Б изоморфно гильбертову пространству $\hat{H}(\lambda)$.

До сих пор мы рассматривали формализм операторнозначных распределений на гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Однако все наши результаты могут быть распространены на пространство $H = L^2(X)$, где $X = G/G_0$ — однородное пространство правых классов смежных элементов $\{G_0 g\}$ (G — связная группа Ли, а G_0 — замкнутая подгруппа в G). Группа G действует на элементы $\varphi \in \Phi(X) \subset L^2(X)$ посредством правых сдвигов

$$(T_g\varphi)(x) = \varphi(xg),$$

т. е. отображение $g \to T_g$ задает унитарное квазирегулярное представление группы G в $L^2(X)$.

Предположим, что все предположения теоремы 2.1 удовлетворены. Тогда обобщенное разложение Фурье элемента $\varphi \in \Phi(X) \subset$

$\subset L^2(X)$ задается формулой (1.4). Используя формулу (9) для P^{λ}_{pq} и формулы (1.4), (2.12), получаем

$$(P^{\lambda}_{pq}\varphi)(x) = \rho(\lambda)\int dg D^{\lambda}_{pq}(g)\varphi(xg) =$$

$$= \tilde{\rho}(\lambda)\int_G dg\overline{D^{\lambda}_{pq}(g)}\int_{\tilde{\Lambda}}\sum_{r,s} D^{\lambda'}_{sr}(g)\hat{\varphi}_r(\lambda')e_s(\lambda', x)\,d\tilde{\rho}(\lambda') =$$

$$= \tilde{\rho}(\lambda)\hat{\varphi}_g(\lambda)e_p(\lambda, x) \in H(\lambda) \subset \Phi'(X) \tag{28}$$

при условии, что $\hat{\varphi}_r(\lambda)$ и $e_s(\lambda, x)$ — непрерывные функции от λ; это условие удовлетворяется в большинстве практически интересных случаев. Следовательно, как и в случае пространства $L^2(G)$ величина P^{λ}_{pq} представляет собой отображение из $\Phi(X)$ в $H(\lambda) \subset \subset \Phi'(X)$, т. е. она определяет операторнозначное распределение. Доказательство утверждений 2 и 3 для операторнозначных распределений P^{λ}_{pq} на $L^2(X)$ проводится аналогично, и мы его опускаем.

Как мы показали, пространства $H(\lambda)$, натянутые на обобщенные собственные векторы $e_k(\lambda)$, играют важную роль в приложениях. Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} и P^{λ} дают естественный инструмент для выделения этих пространств из пространства $H(G)$ или $H(X)$.

Операторнозначные распределения P^{λ}_{pq} дают удобный метод решения различных практических задач, которые встречаются в теории представлений групп и квантовой физике. Например, можно вывести общую формулу для коэффициентов Клебша—Гордана для некомпактных групп. В самом деле, пусть $\tilde{H} = H(\lambda_1)\otimes H(\lambda_2)$ — пространство тензорного произведения $T = T^{\lambda_1}\otimes T^{\lambda_2}$ неприводимых представлений T^{λ_1} и T^{λ_2} группы G, и пусть $\{e_k(\lambda_i)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $H(\lambda_i)$ $i = 1, 2$. Тогда в силу формулы (21) элемент

$$e_p(\lambda) = P^{\lambda}_{pq}e_r(\lambda_1)e_s(\lambda_2), \tag{29}$$

при фиксированных q, r и s имеет следующие трансформационные свойства:

$$T_x e_p(\lambda) = \sum_r D^{\lambda}_{rp}(x)e_r(\lambda),$$

т. е. он преобразуется по неприводимому унитарному представлению T^{λ} группы G. Следовательно, выражение

$$\langle\lambda, p\,|\,\lambda_1, p_1; \lambda_2, p_2\rangle \equiv N^{-1}\langle e_p(\lambda), e_{p_1}(\lambda_1)e_{p_2}(\lambda_2)\rangle \equiv$$

$$\equiv N^{-1}\langle P^{\lambda}_{pq}e_r(\lambda_1)e_s(\lambda_2), e_{p_1}(\lambda_1)e_{p_2}(\lambda_2)\rangle \tag{30}$$

является проектором базисного вектора $e_p(\lambda)$ на базисный вектор $e_{p_1}(\lambda_1)\, e_{p_2}(\lambda_2)$ и представляет собой коэффициент Клебша—Гордана. Константа N представляет собой нормировочный множитель для вектора (29). Мы видим, что коэффициент Клебша—Гордана (30) является фактически матричным элементом операторнозначного распределения P^{λ}_{pq} в тензорном базисе пространства $\tilde{H}$. Используя формулу (9) для P^{λ}_{pq} и соотношение

$$T_x e_r(\lambda_1)\, e_s(\lambda_2) = T_x^{\lambda_1} e_r(\lambda_1) \cdot T_x^{\lambda_2} e_s(\lambda_2) = \\ = \sum_{r_1} D^{\lambda}_{r_1 r}(x)\, e_{r_1}(\lambda_1) \sum_{s_2} D^{\lambda_2}_{s_2 s}(x)\, e_{s_2}(\lambda_2),$$

получаем

$$\langle \lambda,\ p \,|\, \lambda_1,\ p_1;\ \lambda_2,\ p_2 \rangle = N^{-1} \int\limits_G \mathrm{d}x\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, D^{\lambda_1}_{p_1 r}(x)\, D^{\lambda_2}_{p_2 s}(x). \qquad (31)$$

§ 5. Комментарии и дополнения

А. *Теория Хариш-Чандры и Хелгасона*

Опишем теперь очень интересный подход к гармоническому анализу на симметрических пространствах G/K, который основывается на геометрических идеях. Эта теория была начата Гельфандом и Хариш-Чандрой и завершена Хелгасоном [394, 397—399].

В случае обычного анализа Фурье имеем

$$\hat{\varphi}(p) = \int\limits_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}x,$$

где $(x,\ p) = x_\mu p^\mu$ и

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{\varphi}(p) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}p,$$

или в полярных координатах $p = \lambda\omega$ ($\lambda \geqslant 0$ и ω — единичный вектор)

$$\hat{\varphi}(\lambda\omega) = \int\limits_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \mathrm{d}x, \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^+} \int\limits_{S^{n-1}} \hat{\varphi}(\lambda\omega) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \lambda^{n-1}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\omega, \qquad (2)$$

где $R^+ = \{\lambda \in R,\ \lambda \geqslant 0\}$ и $\mathrm{d}\omega$ — элемент объема на единичной сфере S^{n-1}. Функция e_p: $x \to \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]$ имеет следующие свойства:

1) e_p — собственная функция оператора Лапласа на R^n,