является проектором базисного вектора $e_p(\lambda)$ на базисный вектор $e_{p_1}(\lambda_1)\, e_{p_2}(\lambda_2)$ и представляет собой коэффициент Клебша—Гордана. Константа N представляет собой нормировочный множитель для вектора (29). Мы видим, что коэффициент Клебша—Гордана (30) является фактически матричным элементом операторнозначного распределения P^{λ}_{pq} в тензорном базисе пространства $\tilde{H}$. Используя формулу (9) для P^{λ}_{pq} и соотношение

$$T_x e_r(\lambda_1)\, e_s(\lambda_2) = T_x^{\lambda_1} e_r(\lambda_1) \cdot T_x^{\lambda_2} e_s(\lambda_2) = \\ = \sum_{r_1} D^{\lambda}_{r_1 r}(x)\, e_{r_1}(\lambda_1) \sum_{s_2} D^{\lambda_2}_{s_2 s}(x)\, e_{s_2}(\lambda_2),$$

получаем

$$\langle \lambda,\ p \,|\, \lambda_1,\ p_1;\ \lambda_2,\ p_2 \rangle = N^{-1} \int\limits_G \mathrm{d}x\, \overline{D^{\lambda}_{pq}(x)}\, D^{\lambda_1}_{p_1 r}(x)\, D^{\lambda_2}_{p_2 s}(x). \qquad (31)$$

§ 5. Комментарии и дополнения

А. *Теория Хариш-Чандры и Хелгасона*

Опишем теперь очень интересный подход к гармоническому анализу на симметрических пространствах G/K, который основывается на геометрических идеях. Эта теория была начата Гельфандом и Хариш-Чандрой и завершена Хелгасоном [394, 397—399].

В случае обычного анализа Фурье имеем

$$\hat{\varphi}(p) = \int\limits_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}x,$$

где $(x,\ p) = x_\mu p^\mu$ и

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{\varphi}(p) \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]\, \mathrm{d}p,$$

или в полярных координатах $p = \lambda\omega$ ($\lambda \geqslant 0$ и ω — единичный вектор)

$$\hat{\varphi}(\lambda\omega) = \int\limits_{R^n} \varphi(x) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \mathrm{d}x, \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^+} \int\limits_{S^{n-1}} \hat{\varphi}(\lambda\omega) \exp[\mathrm{i}\lambda(x,\ \omega)]\, \lambda^{n-1}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\omega, \qquad (2)$$

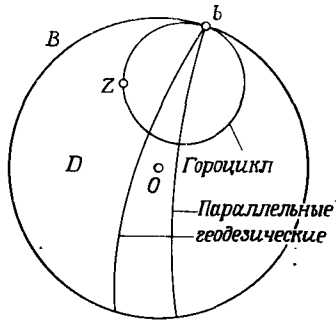
где $R^+ = \{\lambda \in R,\ \lambda \geqslant 0\}$ и $\mathrm{d}\omega$ — элемент объема на единичной сфере S^{n-1}. Функция e_p: $x \to \exp[\mathrm{i}(x,\ p)]$ имеет следующие свойства:

1) e_p — собственная функция оператора Лапласа на R^n,

2) e_p — константа для каждой гиперплоскости, перпендикулярной p (т. е. e_p — плоская волна с нормалью p).

Чтобы распространить гармонический анализ из R^n на симметрические пространства $X = G/K$, необходимы обобщенные «плоские волны» e_p на X, которые удовлетворяли бы свойствам 1) и 2) и давали бы разложение функций из $L^2(X, \mu)$.

Простейшим нетривиальным случаем, для которого это распространение может быть сделано, является симметрическое пространство $x = \mathrm{SU}(1, 1)/U(1)$, которое изоморфно диску $D = \{z \in C: |z| < 1\}$ (см. гл. 4, упражнение 5.2.4). Обобщим геометрические свойства плоских волн на кривое пространство D. Пусть B — граница диска D, т. е. $B = \{z \in C: |z| = 1\}$. Параллельными геодезическими в D по определению являются геодезические, выходящие из одной и той же точки на границе B диска D (фиг. 3).



Фиг. 3.

По определению гороциклом с нормалью $b \in B$ является траектория, ортогональная к семейству всех параллельных геодезических, соответствующих точке b (фиг. 3). Следовательно, гороцикл в D является неевклидовым аналогом гиперплоскости в R^n. Внутреннее произведение (x, ω) в формуле (1) есть расстояние от начала до гиперплоскости с нормалью ω, проходящей через x. По аналогии $\langle z, b\rangle$ для $z \in D$, $b \in B$ определяем как риманово расстояние от O до гороцикла $\xi(z, b)$ с нормалью b, проходящего через z. Функция

$$e_{p,b}\colon z \to \exp(p\langle z, b\rangle), \quad b \in B, \quad p \in C, \quad z \in D, \tag{3}$$

имеет свойства плоских волн на R^n. В самом деле,

1) $e_{p,b}$ — собственная функция оператора Лапласа—Бельтрами Δ на D ($\Delta = [1 - (x^2 + y^2)]^2 (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, см. упражнение 4.5.2.5);

2) $e_{p,b}$ — константа для каждого гороцикла $\xi(z, b)$ с нормалью b.

Следующая теорема показывает, что собственные функции $e_{p,b}(z)$ на D фактически являются естественным расширением понятия плоских волн e_p на R^n.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in C_0(D)$. *Положим*

$$\hat{\varphi}(p, b) = \int_D \varphi(z) \exp[(-ip + 1)\langle z, b\rangle]\, dz, \quad p \in R, \quad b \in B, \tag{4}$$

где $dz = (1 - |z|^2)^{-2}\, dx\, dy$ — *элемент объема на* D. *Тогда*

$$\varphi(z) = (2\pi)^{-2} \int_R \int_B \hat{\varphi}(p, b) \exp[(ip + 1)\langle z, b\rangle]\, p \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi p\right) dp\, db, \tag{5}$$

где db — *обычная угловая мера на* B $(= S^1)$.

(Доказательство см. в [394].)

Чтобы распространить эту теорему на произвольное симметрическое пространство, мы нуждаемся в обобщении понятий границы B, гороцикла ξ и комплексного расстояния $\langle z, b\rangle$.

Пусть K — максимальная компактная подгруппа полупростой группы Ли G, и пусть L — алгебра Ли группы G. Пусть $L = K \oplus H_p \oplus N_0$ — разложение Ивасавы алгебры L. Обозначим через M централизатор подалгебры H_p в K:

$$M = \{k \in K : (\operatorname{Ad} k) Y = Y \quad \text{для всех} \quad Y \in H_p\}. \tag{6}$$

Оказывается, что обобщение границы B на произвольное симметрическое пространство задается пространством смежных классов $B = K/M$.

Теоретико-групповой анализ гороцикла на диске D обнаруживает, что гороциклами являются орбиты в D всех групп вида $g\mathcal{N}g^{-1}$, где $\mathcal{N}$ — нильпотентная группа, соответствующая подалгебре N_0 алгебры su (1, 1). Отсюда следует, что для произвольного симметрического пространства $X = G/K$ гороцикл можно определить как орбиту в X подгруппы группы G вида $g\mathcal{N}g^{-1}$, где $\mathcal{N}$ — нильпотентная группа в разложении Ивасавы $G = K\mathcal{A}_p\mathcal{N}$. Легко проверить следующие свойства гороциклов.

Лемма 2. 1. *Группа* G *переставляет гороциклы транзитивно.*

2. *Каждый гороцикл* ξ *может быть записан в виде*

$$\xi = ka\xi_0, \tag{7}$$

где a — *однозначно определенный элемент подгруппы* $\mathcal{A}_p$.

3. *Для заданных* $x \in X$, $b \in B$ *существует точно один гороцикл, проходящий через* x, *с нормалью* b.

(Доказательство см. в [394].)

Элемент $a \in \mathcal{A}_p$ в (7) называется *комплексным расстоянием* от смежного класса $K = 0$ до ξ. Обозначим комплексное расстояние $a \in \mathcal{A}_p$ от 0 до гороцикла, определенного леммой 2.3, символом $\exp A(x, p)$, $A(x, p) \in H_p$.

Дадим теперь обобщение плоских волн на произвольные симметрические пространства. Пусть $b \in B$ и пусть p — комплексный линейный функционал на H_p. Положим

$$e_{p,b}\colon x \to \exp[p(A(x, b))], \quad x \in X.$$

Очевидно, что $\exp[p(A(x, b))]$ — константа на каждом горосикле.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $X = G/K$ — симметрическое пространство Картана. Тогда*

1. *Функции $e_{p,b}$ являются собственными функциями всех инвариантных операторов C из центра Z обертывающей алгебры E группы G, представленных дифференциальными операторами на $L^2(X, \mu)$.*

2. *Для $\varphi \in C_0^\infty(X)$ определяем обобщенное преобразование Фурье формулой*

$$\widehat{\varphi}(p, b) = \int_X \varphi(x) \exp[(-ip + \rho) A(x, b)] \, d\mu(x), \tag{8}$$

где p — элемент вещественного пространства H_p^*, дуального к H_p, $b \in B$ и $\rho = \sum_{\alpha>0} \alpha$. Тогда формула спектрального синтеза для $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \int_{H_p^*} \int_B \widehat{\varphi}(p, b) \exp[(ip + \rho) A(x, b)] \, |c(p)|^{-2} \, dp \, db \tag{9}$$

при условии, что евклидова мера dp на H_p^* нормализована подходящим образом. Спектральная плотность $|c(p)|^{-2}$ определяется формулой

$$c(p) = \int_{\overline{\mathcal{N}}} \exp[(-ip - \rho) Y(\overline{n})] \, d\overline{n}, \tag{10}$$

где $\overline{\mathcal{N}}$ — аналитическая подгруппа, соответствующая алгебре Ли $\overline{N} = \sum_{\alpha<0} L_\alpha$, и $Y(\overline{n})$, $\overline{n} \in \overline{\mathcal{N}}$, определяется разложением Ивасавы $\overline{n} = k(\overline{n}) \exp[Y(\overline{n})] \, n(\overline{n})$.

Кроме того, мы имеем формулу Парсеваля

$$\int |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) = \int_{H_p^*} \int_B \widehat{\varphi}(p, b) \, |c(p)|^{-2} \, dp \, db, \tag{11}$$

и разложение в прямой интеграл пространства $H = L^2(X, \mu)$ и представления T_g: $\varphi(x) \to \varphi(g^{-1}x)$ задается формулами

$$H \to \widehat{H} = \int \widehat{H}(p) \, |c(p)|^{-2} \, dp, \quad T_g = \int \widehat{T}_g(p) \, |c(p)|^{-2} \, dp, \tag{12}$$

где p пробегает H_p^* по модулю группы Вейля. Все функции $u_p(x) \in H(p)$, заданные формулой

$$u_p(x) = \int_B \exp[i(p + \rho) A(x, b)] \, u(b) \, db, \quad u(b) \in L^2(B, db), \tag{13}$$

являются собственными функциями всех инвариантных дифференциальных операторов центра Z обертывающей алгебры E группы G.

(Доказательство см. в [394].)

Теорема 3 представляет собой один из замечательнейших результатов гармонического анализа на однородных пространствах. Подчеркнем, что доказательство теоремы существенно геометрично и не использует спектрального анализа самосопряженных операторов и аппарата функционального анализа; несмотря на это, оно дает спектральную меру в явном виде.

Б. *Комментарии*

1. Первая работа, имеющая отношение к гармоническому анализу на однородном пространстве, была выполнена Хеке в 1918 г. В ней классифицированы конечномерные пространства непрерывных функций на сфере S^2, инвариантных относительно вращений. Позже (в 1929 г.) Картан распространил гармонический анализ Петера—Вейля на компактных группах до гармонического анализа на компактных римановых пространствах с транзитивной компактной группой Ли изометрий. Однако широкомасштабная активность в этой области исследований началась лишь после 1950 г. Наиболее важный вклад сделан в работах Гельфанда [301], Годемана [334], Березина и Гельфанда [108], Гельфанда и Граева [307], Хариш-Чандры [374, 375], Березина [107], Гиндикина и Карпелевича [329], Хелгасона [389, 390, 393, 394, 396—399] и Виленкина [818, 819].

Гармонический анализ на произвольных симметрических пространствах, представленный в § 2, разработан К. Мореном и Л. Морен ([574], гл. 7). Он дает изящное решение основных задач гармонического анализа на однородных пространствах, основанное на ядерной спектральной теореме. Гармонический анализ на симметрических пространствах ранга один с псевдоортогональной группой преобразований разработан Лимичем, Нидерле и Рончкой [525, 526]. Гармонический анализ на однородных пространствах ранга один для групп $SO_0(p, q)$ с некомпактной стационарной группой разработан Нидерле [638] и Лимичем и Нидерле [524]. Распространение этой теории на симметрические пространства, соответствующие псевдоунитарным группам $U(p, q)$ и симплектическим группам $Sp(n)$, разработан Фишером и Рончкой [260, 261] и Паясом и Рончкой [658] соответственно.

Геометрический подход к гармоническому анализу на симметрических пространствах, представленный в § 4, А, был начат Хариш-Чандрой [374, 375] и завершен Хелгасоном [394, 396—399].

2. В § 3 мы рассмотрели гармонический анализ на симметрических пространствах ранга один, соответствующий псевдоорто-

гональным группам $SO_0(p, q)$, $p \geqslant q > 2$. Такой же анализ может быть проведен для конформных групп $SO_0(p, 2)$ и обобщенных групп Лоренца $SO_0(p, 1)$. Детальный анализ можно найти в ряде работ Лимича, Нидерле и Рончки [525, 526]. В этих работах также рассматривается случай, когда стационарная группа непроста, например случай симметрических пространств X_0, заданных в (3.3).

3. Обобщенные проективные операторы P^{λ}_{pq} для некомпактных групп введены Рончкой [698]. Применение этих операторов к явному построению коэффициентов Клебша—Гордана группы Лоренца дано в [14, 15].

§ 6. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что оператор Лапласа—Бельтрами на конусе

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 0 \tag{1}$$

не существует.

Указание. Покажите, что метрический тензор (3.3) сингулярен.

§ 1.2. Покажите, что на симметрических пространствах $X^{p,q}_{+} = U(p, q)/U(p-1, q)$, заданных формулой

$$|z^1|^2 + \ldots + |z^p|^2 - |z^{p+1}|^2 - \ldots - |z^{p+q}|^2 = 1, \tag{2}$$

кольцо инвариантных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами и оператором $C_1 = \sum_{i=1}^{p+q} X_i$, где X_i — генераторы группы $U(p, q)$.

§ 2.1. Найдите матричные элементы неприводимых наиболее вырожденных представлений группы $Sp(n)$.

Указание. Представьте каждый элемент x из $Sp(n)$ в виде произведения однопараметрических подгрупп и используйте метод Паяса и Рончки [658] явного построения пространства представления.

§ 3.1. Пусть $G = SO(2, 2)$, и пусть $H = L^2(X, \mu)$, где $X = SO(2, 2)/SO(1, 2)$, реализовано как гиперболоид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1. \tag{3}$$

Покажите, что в H существует дискретная серия представлений группы G, характеризуемая собственными значениями

$$\lambda = -L(L+2), \quad L = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

оператора Лапласа—Бельтрами и собственными значениями оператора отражения $Ru(x) = u(-x)$.

§ 3.2. Покажите, что пространства $H_{\pm}(L)$ неприводимых представлений дискретной серии предыдущего упражнения имеют