гональным группам $SO_0(p, q)$, $p \geqslant q > 2$. Такой же анализ может быть проведен для конформных групп $SO_0(p, 2)$ и обобщенных групп Лоренца $SO_0(p, 1)$. Детальный анализ можно найти в ряде работ Лимича, Нидерле и Рончки [525, 526]. В этих работах также рассматривается случай, когда стационарная группа непроста, например случай симметрических пространств X_0, заданных в (3.3).

3. Обобщенные проективные операторы P^{λ}_{pq} для некомпактных групп введены Рончкой [698]. Применение этих операторов к явному построению коэффициентов Клебша—Гордана группы Лоренца дано в [14, 15].

§ 6. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что оператор Лапласа—Бельтрами на конусе

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^{p+q})^2 = 0 \tag{1}$$

не существует.

Указание. Покажите, что метрический тензор (3.3) сингулярен.

§ 1.2. Покажите, что на симметрических пространствах $X^{p,q}_{+} = U(p, q)/U(p-1, q)$, заданных формулой

$$|z^1|^2 + \ldots + |z^p|^2 - |z^{p+1}|^2 - \ldots - |z^{p+q}|^2 = 1, \tag{2}$$

кольцо инвариантных операторов порождается оператором Лапласа—Бельтрами и оператором $C_1 = \sum_{i=1}^{p+q} X_i$, где X_i — генераторы группы $U(p, q)$.

§ 2.1. Найдите матричные элементы неприводимых наиболее вырожденных представлений группы $Sp(n)$.

Указание. Представьте каждый элемент x из $Sp(n)$ в виде произведения однопараметрических подгрупп и используйте метод Паяса и Рончки [658] явного построения пространства представления.

§ 3.1. Пусть $G = SO(2, 2)$, и пусть $H = L^2(X, \mu)$, где $X = SO(2, 2)/SO(1, 2)$, реализовано как гиперболоид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1. \tag{3}$$

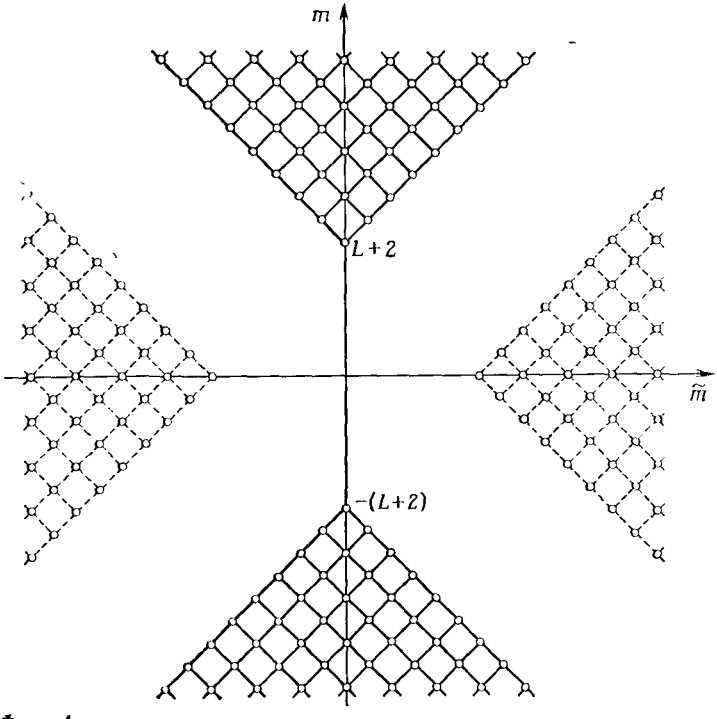
Покажите, что в H существует дискретная серия представлений группы G, характеризуемая собственными значениями

$$\lambda = -L(L+2), \quad L = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

оператора Лапласа—Бельтрами и собственными значениями оператора отражения $Ru(x) = u(-x)$.

§ 3.2. Покажите, что пространства $H_{\pm}(L)$ неприводимых представлений дискретной серии предыдущего упражнения имеют

структуру, показанную на фиг. 4, где m и $\tilde{m}$ — инвариантные числа, характеризующие представление подгруппы $SO(2) \otimes SO(2)$ и удовлетворяющие условию $|m| - |\tilde{m}| = \pm(L + 2 + 2n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.



Фиг. 4.

Представления, полученные после перестановки m и $\tilde{m}$, эквивалентны двум предыдущим представлениям (на фиг. 4 они обозначены пунктирными прямыми).

Указание. Используйте редукцию оператора Лапласа—Бельтрами для SO (2, 2) на подгруппу SO (2) ⊗ SO(2).

§ 3.3. Пусть $G = U(2, 2)$, и пусть $H = L^2(X, \mu)$, где $X = U(2, 2)/U(1, 2)$ представлено следующей гиперсферой в C^4:

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 - |z^3|^2 - |z^4|^2 = 1. \tag{5}$$

Покажите, что на H реализуется дискретная серия представлений группы G, которая характеризуется собственными значениями

$$\lambda = -L(L+6), \quad L = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

оператора Лапласа—Бельтрами и собственными значениями оператора $C_1 = \sum_{i=1}^{4} X_i$, где X_i — генераторы подалгебры Картана группы G.

Указание. Введите бигармоническую систему координат на X и сведите $\Delta(X)$ к одномерному оператору Шредингера.

§ 3.4. Пусть $G = \mathrm{Sp}(p, q)$. Постройте вырожденную серию неприводимых представлений группы G на пространствах $H = L^2(X^{\pm}, \mu)$, где $X^+ = \mathrm{Sp}(p, q)/\mathrm{Sp}(p-1, q)$ и $X^- = \mathrm{Sp}(p, q)/\mathrm{Sp}(p, q-1)$.

Указание. Используйте метод Паяса и Рончки [658], который применен ими для построения вырожденной серии неприводимых представлений группы $\mathrm{Sp}(n)$.