из SO(3, 1) записывается в виде $g = \Lambda_p r$, где $\Lambda_p \in \mathscr{P}$ и $r \in SO$ (3). Учитывая, что $\Lambda_p = s_g$, получаем

$$g_0^{-1}g = (a_0,\ \Lambda_0)^{-1}(0,\ \Lambda_p) = (-\Lambda_0^{-1}a,\ \Lambda_0^{-1})(0,\ \Lambda_p) =$$
$$= (-\Lambda_0^{-1}a_0,\ \Lambda_0^{-1}\Lambda_p) = (0,\ \Lambda_{\Lambda_0^{-1}p})(-\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}a_0,\ \Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p). \quad (52)$$

Поэтому

$$k_{g_0^{-1}s_g} = (-\Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}a_0,\ \Lambda^{-1}_{\Lambda_0^{-1}p}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p). \quad (53)$$

Учитывая, что $\Lambda_p \overset{0}{p} = p$ и $(\Lambda p,\ \Lambda a) = (p,\ a)$, согласно (50), получаем

$$L^{-1}_{k_{g_0^{-1}s_g}} = \exp[i(\overset{0}{p},\ \Lambda_p^{-1}a)]\,[D^J(\Lambda^{-1}_{\Lambda_p^{-1}}\Lambda_0^{-1}\Lambda_p)]^{-1} =$$
$$= \exp[i(p,\ a)]\,D^J\left(\Lambda_p^{-1}\Lambda_0\Lambda_{\Lambda_p^{-1}}\right).$$

Положив $r_\Lambda \equiv \Lambda_p^{-1}\Lambda\Lambda_{\Lambda_p^{-1}}$, находим $[(p,\ a) \equiv pa]$

$$U^L_{(a,\ \Lambda)}u(p) = \exp[ipa]\,D^J(r_\Lambda)\,u(\Lambda^{-1}p). \quad (54)$$

В гл. 17 мы покажем, что при произвольных $m > 0$ и J представления (54) неприводимы.

§ 2. Основные свойства индуцированных представлений

Теперь мы докажем ряд важных свойств индуцированных представлений.

А. *Сопряженные представления* [1])

Прежде всего покажем эквивалентность представления $\overline{U^L}$, сопряженного U^L, и представления $U^{\bar{L}}$, индуцированного представлением $\bar{L}$, которое может быть записано в виде

$$\bar{L}_k = CL_kC,$$

где C — сопряжение (5.1.14) в пространстве H представления L. Если мы образуем представление $U^{\bar{L}}$, индуцированное $\bar{L}$, то каждая вектор-функция $\bar{u}(g)$ из $H^{\bar{L}}$ удовлетворяет условию

$$\bar{u}(kg) = \bar{L}_k\bar{u}(g) = CL_kCu(g). \quad (1)$$

В силу утверждения 3.1.3° сопряжение C может быть поднято до пространства $H^{\bar{L}}$, т. е. $\bar{u}(g) = Cu(g)$. Тогда из (1) и (1.6) следует

$$U^{\bar{L}}_{g_0}\bar{u}(g) = (\rho_{g_0}(g))^{1/2}\bar{u}(gg_0) = CU^L_{g_0}u(g) = \overline{U^L_{g_0}u}(g).$$

[1]) Заметим, что для унитарных представлений сопряженные и контраградиентные представления совпадают [см. (5.1.14)].

т. е.

$$U_g^{\overline{L}} = \overline{U_g^L}. \tag{2}$$

Б. *Представления, индуцированные прямой суммой представлений*

Пусть $\overset{1}{L}$ и $\overset{2}{L}$ — два унитарных представления замкнутой подгруппы K группы G в гильбертовых пространствах $\overset{1}{H}$ и $\overset{2}{H}$ соответственно. Прямая сумма $\overset{1}{L} \oplus \overset{2}{L}$ этих представлений действует в гильбертовом пространстве $\overset{1}{H} \oplus \overset{2}{H}$ согласно формуле

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{2} \overset{i}{L}_g\right) \{\overset{1}{u}, \overset{2}{u}\} = \{\overset{1}{L}_g^1 \overset{1}{u}, \overset{2}{L}_g^2 \overset{2}{u}\}$$

(см. определение 5.3.3). Пространство $H^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}}$ индуцированного представления $U^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}}$ состоит из всех вектор-функций $\{\overset{1}{u}(g), \overset{2}{u}(g)\}$ со значениями в $\overset{1}{H} \oplus \overset{2}{H}$, причем каждое $\overset{i}{u}(g)$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 3° из (1.1).

Отсюда следует

$$H^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}} = H^{\overset{1}{L}} \oplus H^{\overset{2}{L}} \tag{3}$$

и поэтому

$$U^{\overset{1}{L}\oplus\overset{2}{L}} = U^{\overset{1}{L}} \oplus U^{\overset{2}{L}}.$$

Таким образом, операции индуцирования и взятия прямой суммы перестановочны. Этот результат может быть распространен на любую дискретную сумму. В общем случае имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть K — замкнутая подгруппа локально компактной сепарабельной группы G. Пусть L — унитарное представление подгруппы K, которое разлагается в прямой интеграл унитарных представлений $\overset{s}{L}$ подгруппы K, т. е.*

$$L = \int \overset{s}{L}\, d\mu(s). \tag{4}$$

Пусть H — пространство представления L

$$H = \int \overset{s}{H}\, d\mu(s),$$

где каждое $\overset{s}{H}$ является сепарабельным гильбертовым пространством. Тогда представление U^L группы G, индуцированное представлением L, унитарно эквивалентно представлению $\int \overset{s}{U}{}^L\, d\mu(s)$.

Набросок доказательства. Представление U^L группы G реализуется в пространстве H^L вектор-функций на G со значениями в H. Заключение теоремы существенно следует из того факта, что, как и в случае конечной суммы (3), разложению $H = \int \overset{s}{H}\, d\mu\,(s)$ соответствует разложение $H^L = \int \overset{s}{H^L}\, d\mu\,(s)$, где $\overset{s}{H^L}$ — гильбертово пространство вектор-функций на G со значениями в $\overset{s}{H}$. Теоретико-множественные детали доказательства см. в [552], теорема 10.1.

Следствие. *Если представление U^L группы G, индуцированное представлением L подгруппы K, неприводимо, то представление L неприводимо.*

Доказательство. В самом деле, если L приводимо, то оно может быть записано в виде прямой суммы $L = \overset{1}{L} \oplus \overset{2}{L}$. Согласно теореме 1, отсюда следует, что $U^L = U^{\overset{1}{L}} \oplus U^{\overset{2}{L}}$. Это противоречит неприводимости U^L.

Замечание. Обратное заключение неверно: L может быть неприводимым, а U^L приводимым. Например, пусть G — любая группа, $K = \{e\}$ и пусть L — одномерное тождественное представление подгруппы K в $H = C^1$. Тогда U^L — регулярное представление, которое приводимо.

В. *Индуцирование по стадиям*

Пусть N и K — две замкнутые подгруппы в G, такие, что $N \subset K$, и пусть L — представление подгруппы N. Индуцированное представление группы G можно получить или прямо, образуя ${}_GU^L$, или по стадиям, т. е. образуя сначала индуцированное представление ${}_KU^L \equiv V$, а затем ${}_GU^V$. Следующая теорема утверждает, что оба метода приводят к эквивалентным результатам.

Теорема 2. *Пусть N, K, $N \subset K$, — замкнутые подгруппы сепарабельной локально компактной группы G. Пусть L — представление подгруппы N, и пусть $V \equiv {}_KU^L$. Тогда ${}_GU^L$ и ${}_GU^V$ — унитарно эквивалентные представления группы G.*

Доказательство этой важной теоремы длинное и трудное (см. [552], теорема 4.1). Чтобы дать представление о ходе доказательства, рассмотрим частный случай, когда однородные пространства $N\backslash K$ и $K\backslash G$ обладают инвариантными мерами.

Доказательство. Начнем с построения пространств ${}_GH^L$ и ${}_GH^V$ индуцированных представлений ${}_GU^L$ и ${}_GU^V$ соответственно. Пусть H — пространство представления L. Тогда пред-

ставление $V = {}_K U^L$ подгруппы K реализуется в гильбертовом пространстве ${}_K H^L$ функций на K со значениями в H, удовлетворяющих условию [см. (1.1)]

$$u(nk) = L_n u(k), \quad n \in N, \quad k \in K. \tag{5}$$

Представление $k \to {}_K U^L = V_k$ подгруппы K в ${}_K H^L$ задается формулой

$$V_{k_0} u(k) = u(kk_0). \tag{6}$$

С другой стороны, пространство ${}_G H^V$, в котором реализуется представление ${}_G U^V$, состоит из функций на G со значениями в ${}_K H^L$, удовлетворяющих условию

$$v(kg) = V_k v(g), \quad k \in K, \quad g \in G. \tag{7}$$

Поскольку значения функции $v(g) \in {}_G H^V$ лежат в ${}_K H^L$, элементы из ${}_G H^V$ можно рассматривать как вектор-функции $F(g, k)$ на $G \times K$ со значениями в H. Формулы (5) и (7) при этом соглашении принимают вид

$$F(g, nk) = L_n F(g, k), \tag{5'}$$

$$F(k_0 g, k) = V_{k_0} F(g, k) = F(g, kk_0). \tag{7'}$$

Положив в (7′) $k = e$, получаем

$$F(g, k_0) = F(k_0 g, e) \equiv \Phi(k_0 g). \tag{8}$$

Покажем теперь, что отображение $S : F \to \Phi$ задает изоморфизм между пространствами ${}_G H^L$ и ${}_G H^V$ и изоморфизм операторов ${}_G U_g^V$ и ${}_G U_g^L$. В самом деле, из (5′) следует

$$\Phi(ng) = L_n \Phi(g), \quad n \in N, \tag{5''}$$

т. е. $\Phi(g) \in {}_G H^L$. Обратно, каждой функции $\Phi \in {}_G H^L$ соответствует по формуле (8) функция $F(g, k)$, удовлетворяющая (5′) и (7′). Более того, ${}_G U_{g_0}^V F(g, k) = F(gg_0, k)$ предполагает, что $\Phi(gg_0) = {}_G U_{g_0}^L \Phi(g)$. Следовательно,

$$S_G U^V S^{-1} = {}_G U^L.$$

Таким образом, чтобы доказать теорему, теперь достаточно показать, что отображение $S : F \to \Phi$ унитарно. Обозначим через X, Y и Z однородные пространства $N \backslash G$, $K \backslash G$ и $N \backslash K$ соответственно. Норма функции Φ из ${}_G H^L$ задается формулой

$$\| \Phi \|^2_{{}_G H^L} = \int_X \| \Phi(g_x) \|_H^2 \, d\mu(x), \tag{9}$$

где g_x — любой элемент правого класса смежных элементов Ng, соответствующего точке $x \in X$, а $d\mu(x)$ — инвариантная мера на X. Подобным же образом

$$\|F\|^2_{G^HV} = \int_Y \|F(g_y, k)\|_{K^HL}\, d\sigma(y), \tag{10}$$

$$\|v\|^2_{K^HL} = \int_Z \|v(k_z)\|^2_H\, d\rho(z). \tag{11}$$

В (10) g_y — любой элемент правого класса смежных элементов Kg, соответствующего точке y из Y (торема 2.4.1), а $d\sigma(y)$ — инвариантная мера на Y. В (11) обозначения аналогичны. Заметим, что после выбора g_y и k_z, соответствующих точкам $y \in Y$ и $z \in Z$, элемент g_x, соответствующий $x \in X$, может быть выбран в виде $k_z g_y$. Поэтому, подставляя (11) в (10), получаем

$$\|F\|^2_{G^HV} = \int_Y \left(\int_Z (\|F(g_y, k_z)\|^2_H\, d\rho(z) \right) d\sigma(y) =$$
$$= \int_{Y\times Z} \|\Phi(k_z g_y)\|^2_H\, d\rho(z)\, d\sigma(y) = \int_X \|\Phi(g_x)\|^2_H\, d\tilde{\mu}(x), \tag{12}$$

где $d\tilde{\mu}(x) = d\sigma(y)\, d\rho(z)$. Теперь покажем, что $d\tilde{\mu}(x)$ — инвариантная мера на X, равная $d\mu(x)$. В самом деле, если $g_x = k_z g_y$, то по теореме 2.4.1 для каждого $g \in G$ получаем

$$g_x g = k_z g_y g = k_z k_{(y,g)} g_{yg} = n_{(z,y,g)} k_{zk(y,g)} g_{yg}, \tag{13}$$

где $n_{(z,y,g)} \in N$.

Поскольку мы предположили, что $d\rho$ и $d\sigma$ — инвариантные меры, то отсюда следует

$$d\tilde{\mu}(xg) = d\rho(zk_{(y,g)})\, d\sigma(yg) = d\rho(z)\, d\sigma(y) = d\tilde{\mu}(x). \tag{14}$$

Поскольку инвариантные меры $d\mu$, $d\sigma$ и $d\rho$ определяются с точностью до постоянного множителя, то их можно нормировать таким образом, что $d\mu = d\rho d\sigma$. Таким образом, обратимое и изометрическое отображение $S : F \to \Phi$ унитарно.

Г. *Представления, индуцированные тензорным произведением представлений*

Пусть $\overset{1}{T}_{g_1}$ и $\overset{2}{T}_{g_2}$ — представления групп G_1 и G_2 в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно. Согласно определению 5.5.2, *внешнее тензорное произведение* $\overset{1}{T}_{g_1} \otimes \overset{2}{T}_{g_2}$ прямого произведения $G_1 \otimes G_2$ в пространстве $H_1 \otimes H_2$ задается формулой

$$(\overset{1}{T} \otimes \overset{2}{T})_{(g_1, g_2)}(u_1 \otimes u_2) = (\overset{1}{T}_{g_1} \otimes \overset{2}{T}_{g_2})(u_1 \otimes u_2) =$$
$$= \overset{1}{T}_{g_1} u_1 \otimes \overset{2}{T}_{g_2} u_2. \tag{15}$$

Следующая теорема описывает связь между представлением произведения $G_1 \times G_2$, индуцированным внешним тензорным произведением $L_1 \otimes L_2$ представлений замкнутых подгрупп K_1 и K_2, и внешним тензорным произведением индуцированных представлений.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть L_1 и L_2 — унитарные представления замкнутых подгрупп K_1 и K_2 сепарабельных локально компактных групп G_1 и G_2 соответственно. Тогда два представления*

$$ {}_{G_1\otimes G_2}U^{L_1\otimes L_2}, \quad {}_{G_1}U^{L_1} \otimes {}_{G_2}U^{L_2} $$

группы $G_1 \otimes G_2$ унитарно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_1 (соответственно H_2) обозначает пространство представления L_1 (L_2) подгруппы K_1 (K_2). Для доказательства следует показать существование унитарного оператора S из $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ на $(H_1 \otimes H_2)^{L_1\otimes L_2}$, такого, что

$$ S({}_{G_1}U^{L_1}_{g_1} \otimes {}_{G_2}U^{L_2}_{g_2}) = {}_{(G_1\otimes G_2)}U^{L_1\otimes L_2}_{(g_1,\, g_2)}S. \tag{16} $$

Чтобы показать это, с каждой парой

$$ \{u_1(g_1),\ u_2(g_2)\}, \quad u_1(g_1) \in H_1^{L_1}, \quad u_2(g_2) \in H_2^{L_2}, $$

сопоставим функцию

$$ G_1 \otimes G_2 \ni (g_1,\ g_2) \to u_1(g_1) \otimes u_2(g_2). \tag{17} $$

Легко проверить, что таким образом определяется линейное отображение S из $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1\otimes L_2}$. В самом деле, условия (1.1) 1° и 2° выполнены. Например, если $(k_1,\ k_2) \in K_1 \times K_2$, то

$$ \begin{aligned} u_1(k_1g_1) \otimes u_2(k_2g_2) &= L_{1k_1} \otimes L_{2k_2}(u_1(g_1) \otimes u_2(g_2)) = \\ &= (L_1 \otimes L_2)_{(k_1,\, k_2)}(u_1(g_1) \otimes u_2(g_2)). \end{aligned} $$

Условие (1.1) 3° также выполняется. В самом деле, если $d\mu_1$ (соответственно $d\mu_2$) — квазиинвариантная мера на $X_1 = K_1 \backslash G_1$ ($X_2 = K_2 \backslash G_2$) и $\rho_{g_1}(x_1)$ [$\rho_{g_2}(x_2)$] — соответствующая производная Радона—Никодима, то $d\mu_1 d\mu_2$ — квазиинвариантная мера на $X_1 \otimes X_2 \cong K_1 \otimes K_2 \backslash G_1 \otimes G_2$ с производной Радона—Никодима $\rho_{g_1}(x_1)\, \rho_{g_2}(x_2)$. Тогда мы имеем

$$ \begin{aligned} &\int\limits_{X_1\otimes X_2} \| u_1(g_1) \otimes u_2(g_2) \|^2_{H_1\otimes H_2}\, d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) = \\ &\quad = \int\limits_{X_1\otimes X_2} \| u_1(g_1) \|^2_{H_1} \| u_2(g_2) \|^2_{H_2}\, d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) = \\ &\quad = \| u_1 \|^2_{H_1^{L_1}} \| u_2 \|^2_{H_2^{L_2}} < \infty. \end{aligned} $$

Следовательно, $u_1(g_1) \otimes u_2(g_2) \in (H_1 \otimes H_2)^{L_1\otimes L_2}$.

Таким образом, существует плотно определенное линейное отображение S тензорного произведения $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Это отображение изометрично. В самом деле, если

$$w = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_1) \otimes v_i(g_2),$$

где

$$u_i(g_1) \in H_1^{L_1}, \quad v_i(g_2) \in H_2^{L_2},$$

то

$$\|S(w)\|^2_{(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}} = \int\limits_{X_1 \otimes X_2} \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i(g_1) \otimes u_i(g_2) \right\|^2_{H_1 \otimes H_2} d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$

$$= \int\limits_{X_1 \otimes X_2} \sum_{i,\, j=1}^{n} (u_i(g_1),\ u_j(g_1))_{H_1} (v_i(g_2),\ v_j(g_2))_{H_2}\, d\mu_1(\dot{g}_1)\, d\mu_2(\dot{g}_2) =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} (u_i,\ u_j)_{H_1^{L_1}} (v_i,\ v_j)_{H_2^{L_2}} =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \right\|^2_{H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}} = \|w\|^2_{H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}}.$$

Следовательно, отображение S расширяется до унитарного оператора всего пространства $H_1^{L_1} \otimes H_2^{L_2}$ в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что образ отображения S образует общее множество[1]) в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$.

В самом деле, по утверждению 1.3 элементы $\widehat{\Phi}(g_1, g_2)$, заданные формулой (1.10), где

$$\Phi(g_1,\ g_2) = \varphi(g_1,\ g_2)(u \otimes v),$$

$\varphi \in C_0(G_1 \otimes G_2)$, $u \in H_1$ и $v \in H_2$, образуют общее множество в пространстве $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Поскольку функции

$$\varphi(g_1,\ g_2) = \psi(g_1)\, \eta(g_2), \quad \psi \in C_0(G_1), \quad \eta \in C_0(G_2),$$

образуют общее множество в $C_0(G_1 \otimes G_2)$, то образы $\widehat{\Phi}$ функций $\Phi = \psi(g_1)\, u \otimes \eta(q_2)\, v = u_\psi \otimes v_\eta$ все еще образуют общее множество в $(H_1 \otimes H_2)^{L_1 \otimes L_2}$. Используя формулу (1.10), легко проверить, что

$$\widehat{\Phi} = S(\widehat{u}_\psi \otimes \widehat{v}_\eta).$$

Следовательно, заключение теоремы 3 справедливо.

---

[1]) Подмножество Q в гильбертовом пространстве H называется *общим множеством*, если линейная оболочка элементов из Q образует плотное множество в H.