из теоремы 3, которая фактически утверждает, что отображение $\varphi : R(L, L') \ni R \to V$ взаимно-однозначно.

Замечание 2. Из теоремы 5 и формулы (16) следует, что если $L \simeq L'$, то индуцированное представление U^L эквивалентно индуцированному представлению $U^{L'}$.

Теоремы 3—5 не дают, вообще говоря, прямого критерия неприводимости представления U^L группы G, индуцированного неприводимым представлением L подгруппы $K \subset G$. Однако в случае, когда система импримитивности $E(Z)$ сопоставляется со спектральной мерой представления инвариантной коммутативной подгруппы N группы G (например, в случае полупрямого произведения $G = N \rtimes M$), теорема 4 дает неприводимость представления U^L (см. теорему 17.1.5).

Прямой критерий неприводимости для индуцированных представлений полупростых групп Ли дается в гл. 19, § 1.

§ 4. Комментарии и дополнения

Теория индуцированных представлений была начата Фробениусом в 1898 г. [284]. Он дал основную конструкцию индуцирования, представленную в § 1, в случае конечных групп. Интересно, что этот простой метод мог бы быть сразу распространен на многие группы. Но он был использован для непрерывных групп только через сорок лет. Это было сделано Вигнером в 1939 г. в его классической статье [852] по классификации неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре. Позднее этот метод был применен Баргманом [37] и Гельфандом и Наймарком [314] для построения представлений группы Лоренца. Вскоре Гельфанд и Наймарк поняли общность и силу техники индуцированных представлений и в фундаментальной работе [315] в 1950 г. дали конструкцию «почти всех» неприводимых унитарных представлений всех комплексных классических простых групп Ли.

Систематический анализ общих свойств индуцированных представлений провел Макки. Он дал общую конструкцию индуцированных представлений для произвольной локально компактной топологической группы, доказал в общем случае теорему об импримитивности, теорему индуцирования по стадиям, теорему взаимности Фробениуса, теорему о тензорном произведении и другие. Работа Макки, Гельфанда и Наймарка стимулировала развитие теории представлений групп и их приложений в квантовой физике. В частности, метод индуцированных представлений был применен к различным конкретным группам, таким, как группы движений n-мерных пространств Минковского и Евклида, SL (n, R), SU (p, q) и т. д. Систематический анализ свойств индуцированных представлений вещественных полупростых групп Ли выполнил Брюа

[150]. В частности, он вывел важный критерий неприводимости индуцированных представлений.

Обобщение техники индуцированного представления на построение так называемых голоморфных и частично голоморфных индуцированных представлений, а также упрощенный вывод некоторых результатов Макки даны Блаттнером [124, 125].

Представленная в § 3 идея доказательства теоремы об импримитивности принадлежит Поулсену (не опубликовано) и в настоящей форме была сообщена нам Орстедом.

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Пусть G — трехмерная вещественная нильпотентная группа с законом композиции

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2), \quad x, y, z \in R^1.$$

Группа G является полупрямым произведением $G = N \rtimes S$ абелевой нормальной подгруппы $N = \{(0, y, z)\}$ и $S = \{(x, 0, 0)\}$. Пусть $(0, y, z) \to L_{(0, y, z)} = \exp(i\hat{z}z)$, $\hat{z} \in R$, — одномерное представление подгруппы N. Покажите, что представление U_g^L имеет вид

$$U^L_{(x, y, z)} u(\xi) = \exp i[\hat{z}(z + \xi y)]\, u(\xi + x). \tag{1}$$

§ 1.2. Пусть $G = SO(3)$. Покажите, что любое представление группы G, индуцированное неприводимым представлением любой подгруппы K группы G, приводимо.

§ 1.3. Пусть G — евклидова группа $T^n \rtimes SO(n)$, и пусть $K = T^n \rtimes SO(n-1)$. Возьмите

$$k \to L_k = L_{(a, r)} = \exp(i\overset{0}{p}a)\, D^m(r), \tag{2}$$

где $\overset{0}{p} = (M, 0, \ldots, 0)$ и $D^m(r)$ — неприводимое представление подгруппы $SO(n-1)$, характеризуемое старшим весом m. Покажите, что

1° пространство $X = G/K$ изоморфно сфере $p_\mu p^\mu = M^2$;

2° действие неприводимого представления U^L группы G в $H = L^2(X, \mu)$, где $d\mu(p)$ — инвариантная мера на сфере, задается формулой

$$(U^L_{(a, R)} u)(p) = \exp(ipa)\, D^J(r_R)\, u(R^{-1}p), \tag{3}$$

где $r_R = R_p^{-1} R R_{R^{-1}p}$ и R_p — вращение, определенное формулой

$$p = R_p \overset{0}{p}.$$