[150]. В частности, он вывел важный критерий неприводимости индуцированных представлений.

Обобщение техники индуцированного представления на построение так называемых голоморфных и частично голоморфных индуцированных представлений, а также упрощенный вывод некоторых результатов Макки даны Блаттнером [124, 125].

Представленная в § 3 идея доказательства теоремы об импримитивности принадлежит Поулсену (не опубликовано) и в настоящей форме была сообщена нам Орстедом.

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Пусть G — трехмерная вещественная нильпотентная группа с законом композиции

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2), \quad x, y, z \in R^1.$$

Группа G является полупрямым произведением $G = N \rtimes S$ абелевой нормальной подгруппы $N = \{(0, y, z)\}$ и $S = \{(x, 0, 0)\}$. Пусть $(0, y, z) \to L_{(0, y, z)} = \exp(i\hat{z}z)$, $\hat{z} \in R$, — одномерное представление подгруппы N. Покажите, что представление U_g^L имеет вид

$$U^L_{(x, y, z)} u(\xi) = \exp i[\hat{z}(z + \xi y)]\, u(\xi + x). \tag{1}$$

§ 1.2. Пусть $G = SO(3)$. Покажите, что любое представление группы G, индуцированное неприводимым представлением любой подгруппы K группы G, приводимо.

§ 1.3. Пусть G — евклидова группа $T^n \rtimes SO(n)$, и пусть $K = T^n \rtimes SO(n-1)$. Возьмите

$$k \to L_k = L_{(a, r)} = \exp(i\overset{0}{p}a)\, D^m(r), \tag{2}$$

где $\overset{0}{p} = (M, 0, \ldots, 0)$ и $D^m(r)$ — неприводимое представление подгруппы $SO(n-1)$, характеризуемое старшим весом m. Покажите, что

1° пространство $X = G/K$ изоморфно сфере $p_\mu p^\mu = M^2$;

2° действие неприводимого представления U^L группы G в $H = L^2(X, \mu)$, где $d\mu(p)$ — инвариантная мера на сфере, задается формулой

$$(U^L_{(a, R)} u)(p) = \exp(ipa)\, D^J(r_R)\, u(R^{-1}p), \tag{3}$$

где $r_R = R_p^{-1} R R_{R^{-1}p}$ и R_p — вращение, определенное формулой

$$p = R_p \overset{0}{p}.$$

Указание. Используйте формулу (1.47) и метод примера 1.3.

§ 2.1. Пусть $k \to L_k$ — неразложимое представление замкнутой подгруппы K топологической группы G. Покажите, что индуцированное представление U^L группы G также неразложимо.

§ 1.4. Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$ и $K = \mathrm{SO}(2)$. Возьмите неприводимое представление L подгруппы K (заданное характером) и найдите индуцированное представление U^L группы G в $H = L^2(X, \mu)$, $X = K \backslash G \simeq S^2$. Покажите, что полученное представление приводимо. Покажите, что каждое представление группы G, индуцированное любой подгруппой K, приводимо.

§ 1.5. Покажите, что группа SL (2, R) имеет также дополнительную серию представлений, заданную формулой

$$T_g u(x) = |\beta x + \delta|^{\rho-1} u\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right), \quad g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \tag{4}$$

которые реализуются в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$, заданным формулой

$$(u, v) = \Gamma^{-1}(-\rho) \int |x_1 - x_2|^{-1-\rho} u(x_1) \overline{u(x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

с $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$. Найдите малую группу для представления (4).