как это и должно быть. Ясно, что в кинетической теории газов, например, молекулы являются элементарными частицами, если при рассматриваемых процессах внутренняя структура молекулы не возбуждается и не существует никакой связи с другими частями гильбертова пространства. Подобным образом, ядра являются элементарными частицами в атомных явлениях и т. д.

Как мы делали в предыдущем параграфе, «измерение» на элементарной частице будет описываться с помощью вершины взаимодействия с константной связи λ:

$$M = \lambda \langle p', \sigma' | T | p, \sigma \rangle = \lambda \langle \overset{0}{p}\sigma' | \exp(-i\xi' \cdot \boldsymbol{M}) T \exp(i\xi \cdot \boldsymbol{M}) | \overset{0}{p}\sigma \rangle.$$

Здесь m и j фиксированы в обеих сторонах, а T — общий тензорный оператор, который представляет внешний фактор.

Использование группы Пуанкаре в определении элементарной системы включает в себя плоское пространство Минковского в качестве физического пространства. Если мы изменим топологию пространства или его метрику, или и то и другое, то группа движений также изменится. Например, асимптотически плоское пространство общей теории относительности приводит к группе Бонди — Мелцнера — Сакса, которая является полупрямым произведением бесконечной абелевой группы с SL(2, C), и можно было бы основывать понятие элементарной частицы на представлениях этой группы.

§ 3. Представление расширенной группы Пуанкаре

Проанализируем теперь свойства представлений группы Пуанкаре, включающей пространственные и временное отражения. Пусть I обозначает оператор обращения пространства P или времени T в гильбертовом пространстве H унитарного представления U группы Пуанкаре, и пусть $\hat{I}$, $\hat{P}$ и $\hat{T}$ обозначают соответствующие операторы в пространственно-временном или импульсном пространстве. По определению мы имеем

$$\hat{P}a \equiv a_{\hat{P}} = (a_0, -a), \quad \hat{T}a \equiv a_{\hat{T}} = (-a_0, a). \tag{1}$$

Предположим, что действие преобразований P и T на $T_{(a, \Lambda)}$ задается формулой

$$I^{-1} U_{(a, \Lambda)} I = U_{(a_{\hat{I}}, \Lambda_{\hat{I}})}. \tag{2}$$

Вектор импульса $\hat{p}$ должен преобразовываться при преобразованиях Лоренца подобно $\hat{a}$ и быть линейным по p. Поэтому он должен иметь вид

$$p_{\hat{I}} = \lambda (p_0, -p),$$

где $\lambda \in C^1$. Поскольку $\widehat{I}\widehat{I}p = p$, то мы имеем $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Чтобы определить знак λ, наложим дополнительное условие, а именно определенность энергии. Это дает $\lambda = \pm 1$ и

$$p_{\widehat{I}} = (p_0, \ -p).$$

Следовательно,

$$(\widehat{P}a, \ \widehat{P}p) = (a, \ p), \quad (\widehat{T}a, \ \widehat{T}p) = -(a, \ p). \tag{3}$$

В силу (2) мы имеем

$$(I^{-1}T_{(a,\,e)}I)\,\psi(p) = T_{(\widehat{I}a,\,e)}\psi(p) = \exp\,[\mathrm{i}\,(\widehat{I}ap)]\,\psi(p). \tag{4}$$

Согласно (3), это означает, что P должно быть линейным, а T — антилинейным преобразованием в гильбертовом пространстве H, т. е.

$$P\psi(p) = \eta\psi(p), \quad T\psi(p) = C\psi^*(p), \tag{5}$$

где η и C — матрицы.

Покажем теперь, что

$$\Lambda_{\widehat{I}} = \widehat{I}^{-1}\Lambda\widehat{I} = \Lambda^{*-1}. \tag{6}$$

В самом деле, например, из вида генераторов $M_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ группы Лоренца следует, что отражения пространства и времени коммутируют с группой вращений и антикоммутируют с чисто лоренцевыми преобразованиями. В силу 3.11.6.8 мы имеем

$$\Lambda = u_1\varepsilon u_2, \quad u_1, \ u_2 \in \mathrm{SU}(2), \tag{7}$$

где $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$ — чисто лоренцево преобразование; поэтому мы получаем

$$\Lambda_{\widehat{I}} = u_1\varepsilon^{-1}u_2 = \Lambda^{*-1}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Матрица η в (5) должна удовлетворять условию*

$$D^*(\Lambda)\,\eta D(\Lambda) = \eta, \tag{9}$$

а матрица C задается формулой

$$C = \lambda D(\mathrm{i}\sigma_2), \quad |\lambda| = 1, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Если η существует, то это — оператор четности для представления $D(\Lambda)$.

Доказательство. Поскольку

$$T_{(0,\,\Lambda)}\psi(p) = D(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p), \tag{11}$$

в силу (5) получаем

$$D(\Lambda_{\hat{P}}) = \eta D(\Lambda)\eta^{-1}, \quad D(\Lambda_{\hat{T}}) = C\overline{D}(\Lambda)C^{-1}. \tag{12}$$

Но из соотношения (8) следует

$$D(\Lambda_{\hat{I}}) = D(\Lambda^{*-1}) = D^{*-1}(\Lambda). \tag{13}$$

Используя (2.14), видим, что условие (12) для T может всегда удовлетворяться, если $C = \lambda D(\sigma_2)$, $|\lambda| = 1$. Чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что по теореме 8.1.4 каждое представление $D(\Lambda)$ группы SL(2, C) является прямой суммой неприводимых представлений $D^{(j_1, j_2)}$. В SU(2) $\times$ SU(2)-базисе представления $D^{(j_1, j_2)}$ все генераторы подгруппы SU(2) эрмитовы, а все генераторы чисто лоренцевых преобразований антиэрмитовы. Поэтому в силу (9) для $r \in$ SU(2) имеем

$$D^*(r)\eta \cdot D(r) = D^{-1}(r)\eta D(r) = \eta, \tag{14}$$

а для чисто лоренцевых преобразований Λ_p

$$D^*(\Lambda)\eta D(\Lambda) = \exp[i\theta_k N_k]\eta \exp[i\theta_k N_k] = \eta. \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) показывают, что η должно коммутировать с J_k и антикоммутировать с N_k, т. е. η — оператор четности для $D(\Lambda)$.

Определим теперь, какие представления группы SL(2, C) удовлетворяют условию (9). Из (1) следует, что P коммутирует с генераторами J группы SL(2, C) и антикоммутирует с генераторами $N = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$ чисто лоренцевых преобразований. Неприводимое представление $D^{(j_1, j_2)}$ группы SL(2, C) относится к SU(2) $\times$ SU(2)-базису, где SU(2) $\times$ SU(2) относится к генераторам $\boldsymbol{J}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{N})$ и $\boldsymbol{J}_2 = \frac{1}{2}i(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{N})$. Следовательно, j_1 и j_2 под действием четности переставляются. Поэтому среди неприводимых представлений группы SL(2, C) только $D^{(j_1, j_2)}$ допускает определение четности в пространстве представления. Если волновая функция $\psi(p)$ преобразуется по представлению $D^{(j_1, j_2)}$, $j_1 \neq j_2$, группы SL(2, C), то для определения оператора четности P нам следует по крайней мере удвоить пространство рассматриваемого представления:

$$D = D^{(j_1, j_2)} \oplus D^{(j_2, j_1)}.$$

Характерные примеры этого процесса и общая теория расширений группы Пуанкаре рассматриваются в гл. 21.