§ 6. Упражнения

§ 1.1. Пусть G — топологическая группа, а $g \to T_g$ — представление группы G в топологическом векторном пространстве Φ. Покажите, что множество $\{\Phi, G\}$ образует полупрямое произведение $\Phi \rtimes G$ с законом композиции

$$(\varphi, g)(\varphi', g') = (\varphi + T_g\varphi', gg'). \tag{1}$$

§ 1.2. Покажите, что $G = T^n \rtimes \mathrm{SO}(n)$ имеет только два различных класса неприводимых представлений.

§ 1.3. Дайте классификацию неприводимых представлений групп типа группы Лоренца $T^{n+1} \rtimes \mathrm{SO}_0(n, 1)$.

§ 1.4. Пусть G — аффинная группа вещественной прямой:

$$x \to ax + b, \quad a > 0, \quad b \in R,$$

т. е. $G = N \rtimes K$, где $N = \{(b, 1)\}$. Покажите, что G имеет только три различных неприводимых представления U^+, U^- и U^s, причем $U^\pm$ задаются формулой

$$U^\pm_{(a,\, b)} u(x) = \exp(\pm\, \mathrm{i}e^* b)\, u(x + \log a), \quad u \in L^2(R), \tag{2}$$

а U^s является характером, заданным формулой

$$U^s_{(a,\, b)} = \exp(\mathrm{i}s \log a)\, I, \quad s \in R. \tag{3}$$

§ 1.5. Покажите, что группа K(2), состоящая из всех верхних треугольных матриц вида

$$\begin{bmatrix} \delta & \zeta \\ 0 & \delta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \delta, \zeta \in C,$$

является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$ двух абелевых подгрупп $\mathfrak{Z}$ и D. Покажите, что K(2) имеет два различных неприводимых бесконечномерных представления.

§ 2.1. Пусть $g \to U_g$ — унитарное представление группы Пуанкаре в пространстве H. Покажите, что оператор

$$Z = P_0 (P_0^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

где P_0 — генератор временных трансляций, лежит в переплетающей алгебре $R(U, U)$.

Является ли Z элементом обертывающего поля алгебры Ли группы Пуанкаре?

§ 2.2. Покажите, что операторы

$$\lambda_i, M, S_\mu S^\mu, P_\mu \quad (i = 1, 2), \quad P_\mu = P_{(1)\,\mu} + P_{(2)\,\mu} \tag{5}$$

двухчастичной системы, где

$$M = (P^\mu P_\mu)^{1/2}, \quad S_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda, \quad J^{\nu\rho} = J^{\nu\rho}_{(1)} + J^{\nu\rho}_{(2)}, \tag{6}$$

$$\lambda_i = [(P_i^\mu P_\mu)^2 - m_i^2 M^2]^{-1/2} S_i^\mu P_\mu,$$

образуют максимальное множество коммутирующих операторов в тензорном произведении $H = H^{m_1 J_1} \otimes H^{m_2 J_2}$.

§ 2.3. Пусть $|p_i \lambda_i \; [m_i J_i]\rangle$ — базисные векторы в пространствах $H^{m_i J_i}$, $i = 1, 2$, нормированные следующим образом:

$$\langle p_i \lambda_i \, [m_i J_i] \,|\, p_i \lambda_i \, [m_i J_i]\rangle = \varepsilon_i \delta^{(3)} (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}'_i), \quad \varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}.$$

Положим $p = (p_1 - p_2)/2$ и $p = p_1 + p_2$. Поскольку $p^2 = (4M^2)^{-1} (M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2)$, мы можем представить P с помощью M и углов φ и θ. Покажите, что векторы $|p, \Lambda \; [M, J, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}]\rangle =$

$$= \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int \mathrm{d}\,(\cos\theta)\; \mathrm{d}\varphi D^J_{\Lambda\lambda}(\varphi, \theta, 0) \,|\, pM\varphi\theta\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\rangle, \qquad (7)$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, являются общими собственными векторами операторов (6) и нормированы следующим образом:

$$\langle p' \Lambda' \, [M' J' \lambda'_1 \lambda'_2] \,|\, p\Lambda \, [MJ\lambda_1\lambda_2]\rangle = \delta^{(4)} (p - p') \, \delta_{JJ'} \delta_{\lambda_1\lambda'_1} \delta_{\lambda_2\lambda'_2}. \qquad (8)$$

§ 2.4. Пусть $g \to U_g^{(m,\, j)}$ — неприводимое представление группы Пуанкаре, характеризуемое положительной массой m и спином j. Найдите множество аналитических векторов для $U^{(m,\, j)}$.

§ 2.5. Найдите вид спектра инвариантных операторов группы Пуанкаре n-мерного пространства-времени.

Указание. Используйте тот факт, что неприводимые представления характеризуются орбитами и инвариантными числами неприводимого представления стационарной подгруппы.

§ 2.6. Дайте явные реализации представлений $U^{\mathrm{i}m,\, n,\, \pm}$, $U^{\mathrm{i}m,\, \rho}$, $U^{0,\, \pm,\, j}$, $U^{0,\, \pm,\, r,\, \varepsilon}$ группы Пуанкаре так, как дано в тексте для представления $U^{m,\, j}$.

§ 2.7. *Представления группы Пуанкаре в различных базисах.* В некоторых физических приложениях удобно использовать не явный вид индуцированных представлений, а реализации, в которых диагонализируются другие операторы. Рассмотрите: 1) базис общего углового момента: P_0, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{J}$, J_3, 2) базис подгруппы Лоренца: $\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2$, $\boldsymbol{J} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{J}^2$, J_3. Эта реализация также решает задачу разложения представлений группы Пуанкаре по отношению к группе Лоренца.

§ 3.1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$ и $\Lambda \to D\,(\Lambda)$ — конечномерное представление группы G. Покажите, что сопряжение по четности представления $D\,(\Lambda_p)$ совпадает с $D^{*-1}\,(\Lambda_p)$.

§ 4.1. Пусть $G = T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Покажите, что представление U^L, индуцированное характером χ подгруппы T^2, неприводимо.

Указание. Используйте теорему 3.4.

§ 4.2. Рассмотрите и классифицируйте индуцированные представления неоднородной конформной группы $T^6 \rtimes \mathrm{SO}_0(4, 2)$.