где $U^{\chi L}$ — представление $W$, индуцированное представлением $n \to \chi(n) I$ подгруппы $T^2 \rtimes M_{0,\chi}$.

Если $m \in \mathrm{SO}(2)_z$, то

$$D = KmW = KW$$

имеет нулевую меру Хаара (относительно $G$). Значит, оно не дает вклада в разложение (15). Следовательно, представление $\widehat{U^{nL}}$ евклидовой группы $T^3 \rtimes \mathrm{SO}(3)$ при сужении на подгруппу $T^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)_x$ является прямым интегралом (15) по неприводимым представлениям (17).

Индукционно-редукционная теорема оказывается весьма полезной при явном решении различных задач, возникающих в теории представлений групп. В последующих параграфах этой главы и в теории представлений классических групп Ли мы будем ее широко использовать.

## § 2. Теорема о тензорном произведении

Пусть $U^1$ и $U^2$ — неприводимые унитарные представления группы $G$. Одной из центральных задач в теории представлений групп и приложениях является задача о редукции тензорного произведения $U^1 \otimes U^2$ на его неприводимые составляющие. Мы покажем здесь, что индукционно-редукционная теорема дает эффективный метод для разложения тензорного произведения любых двух индуцированных представлений сепарабельной локально компактной группы $G$. Действительно, пусть $K_1$ и $K_2$ — две замкнутые подгруппы в $G$, и пусть $L$ и $M$ — представления $K_1$ и $K_2$ соответственно. Пусть далее $U^L$ и $U^M$ — представления $G$, индуцированные представлениями $L$ подгруппы $K_1$ и $M$ подгруппы $K_2$ соответственно. Пусть

$$\mathscr{G} \equiv G \times G = \{(g_1, g_2);\ g_1, g_2 \in G\}, \quad \tilde{G} \equiv \{(g, g);\ g \in G\}$$

и $K = K_1 \times K_2$. Ясно, что $\tilde{G}$ изоморфна $G$. Пусть $U^L \otimes U^M$ — представление группы $\mathscr{G}$, заданное при помощи внешнего тензорного произведения. Это представление эквивалентно представлению $U^{L \otimes M}$ группы $\mathscr{G}$ ввиду теоремы 16.2.3. С другой стороны, $U^L \otimes U^M$ при сужении на $\tilde{G}$ эквивалентно (внутреннему) тензорному произведению $U^L \otimes U^M$. Имеем поэтому

$$U^L \otimes U^M \cong U^{L \otimes M}_{\tilde{G}}. \tag{1}$$

Таким образом, задача редукции (внутреннего) тензорного произведения $U^L \otimes U^M$ группы $G$ является фактически задачей разложения индуцированных представлений $U^{L \otimes M}$ группы $G \otimes G$,

суженных на подгруппу $\tilde{G} \simeq G$. Эта задача в свою очередь решается при помощи индукционно-редукционной теоремы. Справедлива

ТЕОРЕМА О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ. *Пусть $G$ — сепарабельная локально компактная группа, и пусть $K_1$ и $K_2$ — две регулярно связанные замкнутые подгруппы в $G$. Пусть $L$ и $M$ — представления $K_1$ и $K_2$ соответственно, и пусть $U^L$ и $U^M$ — представления группы $G$, индуцированные представлениями $L$ и $M$ соответственно. Тогда*

1° $$U^L \otimes U^M \cong \int_{\mathscr{D}} U(D)\, d\nu(D), \tag{2}$$

*где $D$ — множество двойных смежных классов $K_1 \backslash G / K_2$, $U(D)$ — унитарное представление группы $G$, а $\nu$ — произвольная допустимая мера в $\mathscr{D}$.*

2° *Представление $G \ni g \to U_g(D)$ в разложении (2) определяется с точностью до эквивалентности двойным смежным классом $D$. Если $L: y \to \tilde{L}_{\gamma y \gamma^{-1}}$ и $M: y \to \tilde{M}_{\gamma y \gamma^{-1}}$, $g, \gamma \in G$, $g\gamma^{-1} \in D$, являются представлениями подгруппы $g^{-1}K_1 g \cap \gamma^{-1}K_2\gamma$, а $\tilde{L} \otimes \tilde{M}$ обозначают их тензорное произведение, то $U(D)$ унитарно эквивалентно представлению $U^{\tilde{L} \otimes \tilde{M}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство с помощью соотношения (1) сводится к ИР-теореме. Определим сначала множество $K \backslash \mathscr{G} / \tilde{G}$ двойных смежных классов.

Два элемента $(g, \gamma)$ и $(g_1, \gamma_1)$ из $\mathscr{G}$ принадлежат одному и тому же двойному смежному классу в $K : \tilde{G}$ тогда и только тогда, когда для некоторых $k_i \in K_i$ и $\tilde{g} \in G$ справедлива формула

$$(k_1, k_2)(g, \gamma)(\tilde{g}, \tilde{g}) = (g_1, \gamma_1).$$

Это условие эквивалентно равенству

$$k_1 g \gamma^{-1} k_2^{-1} = g_1 \gamma_1^{-1}$$

для некоторых $k_i \in K_i$, т. е. равенству

$$\pi(g\gamma^{-1}) = \pi(g_1\gamma_1^{-1}),$$

где $\pi$ обозначает каноническую проекцию $G$ в $K_1 \backslash G / K_2$. Значит, отображение $\theta(g, \gamma) \equiv \pi(g\gamma^{-1})$ определяет взаимно-однозначное отображение между (борелевыми) пространствами $K \backslash \mathscr{G} / \tilde{G}$ и $K_1 \backslash G / K_2$, в котором $K(g, \gamma)\tilde{G}$ соответствует $K_1 g \gamma^{-1} K_2$. Воспользовавшись тем фактом, что $K_1$ и $K_2$ регулярно связаны, убеждаемся, что $\theta$ является изоморфизмом Бореля. Таким образом, $K$ и $\tilde{G}$ регулярно связаны в $G \times G$, и все гипотезы ИР-теоремы удовлетворяются.

Эта теорема утверждает, что $U^{L\otimes M}$ при сужении на $\tilde{G}$ является прямым интегралом по множеству двойных смежных классов $\mathscr{D} = K(g, \gamma)\tilde{G}$ вида

$$U^{L\times M}_{\tilde{G}} \simeq \int_{\mathscr{D}} U_{\tilde{G}}(D)\,\mathrm{d}\nu(D).$$

Каждое слагаемое $U_{\tilde{G}}(D)$ под знаком интеграла является представлением группы $\tilde{G}$, которое индуцировано представлением $(y, y) \to (L \times M)_{(g,\gamma)(y,y)(g,\gamma)^{-1}}$ подгруппы

$$\tilde{G} \cap (g, \gamma)^{-1}(K_1 \times K_2)(g, \gamma).$$

Но подгруппа $\tilde{G} \cap (g, \gamma)^{-1}(K_1 \times K_2)(g, \gamma)$, поднятая до $G$ при помощи изоморфизма $(g, g) \to g$, является подгруппой $g^{-1}K_1g \cap \cap \gamma K_2\gamma^{-1}$. Наконец, представление $(y, y) \to (L \otimes M)_{(g,\gamma)(y,y)(g,\gamma)^{-1}}$ становится представлением $\tilde{L} \otimes \tilde{M}$, где $L\colon y \to L_{gyg^{-1}}$ и $M : y \to \to M_{\gamma y\gamma^{-1}}$ — представления подгруппы $g^{-1}K_1g \cap \gamma^{-1}K_2\gamma$.

Теорема о тензорном произведении дает изящный метод редукции тензорных произведений унитарных представлений различных групп физических симметрий, таких, как группа Лоренца, евклидова группа, группа Галилея или группа Пуанкаре.

Последние три группы имеют вид полупрямого произведения $N \rtimes M$, где $N$ и $M$ сепарабельны и локально компактны, а $N$ коммутативна. Следовательно, мы получаем теперь частный случай теоремы ТП для этого класса групп.

Пусть $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ — два характера группы $N$. Пусть $M_{\hat{n}_i}$ — замкнутая подгруппа в $M$, состоящая из всех $m \in M$ с $\hat{n}_i m = \hat{n}_i$, $i = 1, 2$. Пусть $L^i$ — неприводимое представление $M_{\hat{n}_i}$, и пусть $\hat{n}_i L_i$ — представление $(n, m) \to \hat{n}_i(n) L^i_m$ группы $N \rtimes M_{\hat{n}_i}$, $i = = 1, 2$. Тогда в силу теоремы 17.1.5 представления $U^{\hat{n}_i L_i}$, индуцированные посредством $\hat{n}_i L_i$, $i = 1, 2$, неприводимы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $G = N \rtimes M$ — полупрямое произведение сепарабельных локально компактных групп $N$ и $M$, $N$ коммутативна, и пусть $M_{\hat{n}_1}$ и $M_{\hat{n}_2}$ — регулярно связанные подгруппы в $M$. Тогда*

1° $$U^{\hat{n}_1 L_1} \otimes U^{\hat{n}_2 L_2} \cong \int_{\mathscr{D}} U_G(D)\,\mathrm{d}\nu(D), \tag{3}$$

*где $\mathscr{D}$ — пространство двойных смежных классов $M_{\hat{n}_1}\backslash M/M_{\hat{n}_2}$ в $M$, а $U(D)$ — унитарное представление группы $G$.*

2° *Представления $U(D)$ группы $G$, входящие в* (3) *и соответствующие двойному смежному классу $D$, который содержит элемент $m \in M$*, могут быть вычислены следующим образом: пусть $\chi_1 = \hat{n}_1 m$ и пусть $\chi = \hat{n}_2 \chi_1$. *Пусть $\tilde{L}^i$ — ограничение $L^i$ на $M_{\chi_1} \cap M_{\hat{n}_2} \subseteq M_\chi$. Образуем внутреннее тензорное произведение $\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2$, затем образуем представление $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ группы $M_\chi$, индуцированное посредством $\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2$. Пусть $\int L^\lambda \, d\rho(\lambda)$ — разложение $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ в прямой интеграл неприводимых представлений. Тогда*

$$U_G(D) \simeq \int U_G^{\chi L^\lambda} \, d\rho(\lambda), \tag{4}$$

*где $U^{\chi L^\lambda}$ являются неприводимыми представлениями группы $N \rtimes M$, индуцированными представлением $(n, m) \to \chi(n) L_m^\lambda$ группы $N \rtimes M_\chi$.*

Доказательство. 1° и первая часть 2° вытекают из теоремы 1.2. Остается только заметить очевидное взаимно-однозначное соответствие пространства $N \rtimes M_{\hat{n}_1} \backslash G / N \rtimes M_{\hat{n}_2}$ пространству $D = M_{\hat{n}_1} \backslash M / M_{\hat{n}_2}$, поскольку $N$ нормальна в $G$; уточнение деталей мы предоставляем читателю. Соотношение (4) следует из теоремы 16.2.1. Неприводимость $U^{\chi L^\lambda}$ следует из теоремы 17.1.5.

Теорема 2 дает, таким образом, метод разложения тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые компоненты. Продемонстрируем теперь эффективность теоремы 2 на случае редукции тензорного произведения для двумерной группы Пуанкаре.

Пример 1. Пусть $G = N \rtimes M$ — двумерная группа Пуанкаре. Действие $G$ в двумерном пространстве-времени задается формулой

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha, & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha, & \operatorname{ch}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_t \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Дуальный объект $\hat{N}$ по отношению к группе $N$ состоит из векторов «импульса» $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_t) = p$ с «массой» в квадрате $p^2 = \hat{n}_t^2 - \hat{n}_x^2$. Всякое ненулевое $\hat{n} \in \hat{N}$ имеет стационарную группу $M_{\hat{n}} = \{e\}$. Для $\hat{n} = (0, 0)$, $M_{\hat{o}} = M$. Значит, каждое неприводимое представление группы $G$ является представлением $U^{\hat{n} I}$, которое индуцировано представлением $n \to \hat{n}(n) \cdot I$ стационарной подгруппы $N \rtimes \{e\}$ при $\hat{n} \neq \hat{o}$, либо представлением группы Лоренца $M$,

поднятым до $G$ при $\hat{n} = \hat{o}$. Мы хотим разложить тензорное произведение $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ на неприводимые компоненты. Так как стационарная группа $M_{\hat{n}}$ всякого ненулевого характера $n$ тождественна, получаем $M_\chi = \{e\}$. Следовательно, $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ — тождественное представление. Таким образом,

$$\int U^{\chi L^\lambda} d\rho(\lambda) = U^{\chi I} \tag{6}$$

является вкладом в $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ двойного смежного класса, содержащего $m \in M$ (т. е. $U(D) = U^{\chi I}$). Разложение (3) тензорного произведения $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ будет прямым интегралом представлений (6) по допустимым характерам $\chi$. Так как по теореме 2.2°

$$\chi(n) = \hat{n}_2(n)\chi_1(n) = \langle n, \hat{n}_2 + \chi_1 \rangle = \exp[i(\hat{n}_2 + \chi_1)n],$$

где $\chi_1 = \hat{n}_1 m$, мы получаем

$$\chi^2 = \chi_1^2 + 2\chi_1 \hat{n}_2 + \hat{n}_2^2 = p_1^2 + 2|p_1||p_2|\operatorname{ch}\alpha + p_2^2, \qquad |p_i| = \sqrt{p_i^2}, \tag{7}$$

т. е.

$$|p_1| + |p_2| \leqslant |\chi| < \infty.$$

Это влечет за собой

$$U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I} \cong \int\limits_{|p_1|+|p_2|}^{\infty} U^{\chi I} d|\chi|. \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что абстрактное разложение (3) в двойные смежные классы имеет интересную физическую интерпретацию. Действительно, соотношение (8) представляет собой разложение системы из двух частиц «с массами» $|p_1|$ и $|p_2|$ на подсистемы с инвариантной массой $|p| = |\chi|$.

Таким же образом теорему 2 без затруднений можно применить и в случае четырехмерной группы Пуанкаре. В этом случае подгруппа $M_\chi$ нетривиальна, и мы получаем дополнительные инвариантные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, которые снимают вырождение представления $U(D)$. Эти дополнительные инвариантные числа отвечают спиральностям первой и второй частиц. Это снова показывает, что абстрактное разложение (3) в применении к физическим задачам дает результаты, имеющие интересную физическую интерпретацию (см. упражнения 5.2.2).

## § 3. Теорема взаимности Фробениуса

Рассмотрим сначала случай конечных групп. Классическая теорема взаимности Фробениуса утверждает следующее.