поднятым до G при $\hat{n} = \hat{o}$. Мы хотим разложить тензорное произведение $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ на неприводимые компоненты. Так как стационарная группа $M_{\hat{n}}$ всякого ненулевого характера n тождественна, получаем $M_\chi = \{e\}$. Следовательно, $U^{\tilde{L}^1 \otimes \tilde{L}^2}$ — тождественное представление. Таким образом,

$$\int U^{\chi L^\lambda} d\rho(\lambda) = U^{\chi I} \tag{6}$$

является вкладом в $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ двойного смежного класса, содержащего $m \in M$ (т. е. $U(D) = U^{\chi I}$). Разложение (3) тензорного произведения $U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I}$ будет прямым интегралом представлений (6) по допустимым характерам χ. Так как по теореме 2.2°

$$\chi(n) = \hat{n}_2(n)\chi_1(n) = \langle n, \hat{n}_2 + \chi_1 \rangle = \exp[i(\hat{n}_2 + \chi_1)n],$$

где $\chi_1 = \hat{n}_1 m$, мы получаем

$$\chi^2 = \chi_1^2 + 2\chi_1 \hat{n}_2 + \hat{n}_2^2 = p_1^2 + 2|p_1||p_2|\operatorname{ch}\alpha + p_2^2, \qquad |p_i| = \sqrt{p_i^2}, \tag{7}$$

т. е.

$$|p_1| + |p_2| \leqslant |\chi| < \infty.$$

Это влечет за собой

$$U^{\hat{n}_1 I} \otimes U^{\hat{n}_2 I} \cong \int\limits_{|p_1|+|p_2|}^{\infty} U^{\chi I} d|\chi|. \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что абстрактное разложение (3) в двойные смежные классы имеет интересную физическую интерпретацию. Действительно, соотношение (8) представляет собой разложение системы из двух частиц «с массами» $|p_1|$ и $|p_2|$ на подсистемы с инвариантной массой $|p| = |\chi|$.

Таким же образом теорему 2 без затруднений можно применить и в случае четырехмерной группы Пуанкаре. В этом случае подгруппа M_χ нетривиальна, и мы получаем дополнительные инвариантные числа λ_1, λ_2, которые снимают вырождение представления $U(D)$. Эти дополнительные инвариантные числа отвечают спиральностям первой и второй частиц. Это снова показывает, что абстрактное разложение (3) в применении к физическим задачам дает результаты, имеющие интересную физическую интерпретацию (см. упражнения 5.2.2).

§ 3. Теорема взаимности Фробениуса

Рассмотрим сначала случай конечных групп. Классическая теорема взаимности Фробениуса утверждает следующее.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — конечная группа, и K — подгруппа в G. Пусть U^{L^i} — представление G, индуцированное неприводимым представлением L^i подгруппы K. Тогда кратность неприводимого представления U^j группы G в U^{L^i} равна кратности представления L^i в сужении представления U^j на K.*

Эта теорема играет важную роль в теории представлений конечных групп и ее приложениях. Дадим теперь принадлежащее Макки обобщение теоремы взаимности на индуцированные представления локально компактных топологических групп. Начнем с переформулирования теоремы 1.

Рассмотрим схему

$$\begin{bmatrix} n(1, 1) & \dots & n(1, s) \\ n(2, 1) & \dots & n(2, s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n(r, 1) & \dots & n(r, s) \end{bmatrix},$$

где строки нумеруются числом i, характеризующим неприводимые представления L^i подгруппы K, столбцы нумеруются числом j, характеризующим неприводимые представления U^j группы G, а на месте (i, j) стоит кратность $n(i, j)$ представления U^j в представлении U^{L^i}. Кратность $n(i, j)$ представляет собой функцию на дуальной группе $\hat{K} \times \hat{G}$ со значениями в множестве неотрицательных целых чисел. Классическую теорему взаимности Фробениуса можно теперь переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1′. *Существует функция $n(\cdot\,,\,\cdot)$ на группе $\hat{K} \times \hat{G}$ со значениями в множестве неотрицательных целых чисел, такая, что*

$$U_G^{L^i} = \sum_{j \in \hat{G}} n(i, j) U^j \quad \text{и} \quad U_K^j = \sum_{h \in \hat{K}} n(h, j) L^h. \tag{1}$$

Оказывается, что теорему взаимности в этой формулировке можно обобщить на случай, когда G и K не обязательно компактны.

Рассмотрим сначала некоторые свойства мер на $\hat{K} \times \hat{G}$. Пусть Z_1 и Z_2 — пространства Бореля, и пусть α — конечная мера на $Z_1 \times Z_2$. Пусть α_1 и α_2 — проекции меры α на Z_1 и Z_2 соответственно, т. е. для борелевых множеств $E_1 \subset Z_1$ и $E_2 \subset Z_2$ мы имеем

$$\alpha_1(E_1) = \alpha(E_1 \times Z_2), \quad \alpha_2(E_2) = \alpha(Z_1 \times E_2). \tag{2}$$

Теорема о разложении меры (см. 4.3.2) утверждает, что существует конечная мера Бореля β_x в Z_2, такая, что

$$\alpha = \int_{Z_1} \beta_x \, d\alpha_1(x).$$

Это означает, что для всех борелевых множеств $E \subset Z_1 \times Z_2$ мы имеем

$$\alpha(E) = \int_{Z_1} \beta_x \{y : (x, y) \in E\} \, d\alpha_1(x).$$

Мера β_x в Z_2 называется *x-срезом* меры α. Аналогично вводится конечная мера Бореля γ_y на Z_1, такая, что

$$\alpha = \int_{Z_2} \gamma_y \, d\alpha_2(y).$$

Мера γ_y называется y-срезом меры α.

Теперь мы можем сформулировать принадлежащее Макки обобщение теоремы взаимности Фробениуса.

Теорема 2. *Пусть K — замкнутая подгруппа сепарабельной локально компактной группы G. Пусть G и K являются группами типа I и имеют гладкие дуальные объекты $\hat{G}$ и $\hat{K}$ соответственно. Пусть U^{L^x} — представление группы G, индуцированное унитарным неприводимым представлением L^x подгруппы K. Тогда существует конечная мера Бореля α в $\hat{K} \times \hat{G}$ и измеримая функция $n(\cdot, \cdot)$ из $\hat{K} \times \hat{G}$ в множество неотрицательных целых чисел, включающее $+\infty$, такие, что*

1° *Проекции α_1 и α_2 меры α на $\hat{K}$ и $\hat{G}$ эквивалентны мерам, определяемым при помощи регулярных представлений групп K и G соответственно.*

2° *Для почти всех x в $\hat{K}$ относительно α_1*

$$U^{L^x} \simeq \int_{\hat{G}} n(x, y) U^y \, d\beta_x(y), \tag{3}$$

где U^y — неприводимые представления G, а β_x является x-срезом меры α.

3° *Для почти всех y в $\hat{G}$ относительно α_2*

$$U^y_K \simeq \int_{\hat{K}} n(x, y) L^x \, d\gamma_y(x), \tag{4}$$

где γ_y является y-срезом меры α.

Доказательство приведено в работе Макки [552]. Упрощенное доказательство приведено в чикагских лекциях Макки [554].

Замечание 1. Теорема Макки дает двойное обобщение теоремы взаимности. Действительно, она дает единую функцию $n(x, y)$, из которой получаются кратности как представления U^y в представлении U^{L^x}, так и L^x в U^y_K соответственно, а также единую меру α, из которой получаются семейства мер $\beta_x(\cdot)$ и $\gamma_y(\cdot)$.

Если G компактна, то прямые интегралы (3) и (4) сводятся к прямым суммам, и мы имеем

$$U_G^{L^I} \cong \sum_{j \in \widehat{G}} n(i, j) U_G^j \quad \text{и} \quad U_K^j = \sum_{n \in \widehat{K}} n(h, j) L_K^h, \tag{5}$$

где $n(i, j)$ — функция из $\widehat{K} \times \widehat{G}$ в множество неотрицательных целых чисел. Этот результат является распространением на компактные группы теоремы 1 для конечных групп.

Дадим теперь два интересных приложения теоремы взаимности.

Пример 1. Пусть G — компактная группа, и пусть $g \to U_g$ — регулярное представление группы G в гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Это представление может рассматриваться как представление U^L группы G, индуцированное тождественным представлением $L = I$ подгруппы $K = \{e\}$, где e — единичный элемент в G. Так как кратность представления L в неприводимом представлении U^j группы G при сужении на K равна $\dim U^j$, то в силу теоремы 2 имеем

$$\text{кратность } n_j \text{ представления } U^j \text{ в } U^L = \dim U^j.$$

Пусть теперь G — некомпактная простая группа Ли. Мы знаем, что всякое нетривиальное унитарное представление группы G бесконечномерно. Следовательно, пользуясь теми же аргументами, заключаем, что каждое нетривиальное унитарное неприводимое представление G, входящее в регулярное представление, содержится бесконечное число раз.

Рассмотрим теперь пример, когда K некомпактна.

Пример 2. Пусть $G = T_4 \rtimes SO(3, 1)$ — группа Пуанкаре, и пусть $K = T_4 \rtimes SO(3)$. Нас интересует кратность представления $\widehat{n}^1 L^1$: $(a, r) \to \widehat{n}^1(a) L_r^1$ подгруппы K в представлении $U^{\widehat{n}L}$ группы G, индуцированном представлением $\widehat{n}L$ подгруппы K. Мы знаем, что $U^{\widehat{n}L}$ неприводимо [теорема (17.1.5)]. Значит, представление $U^{\widehat{n}L}$ при сужении на K содержит $\widehat{n}^1 L^1$ не более чем один раз.

§ 4. Комментарии и дополнения

А. Предположение в теореме 2, что G и K обе являются группами типа I, оказывается существенным, когда K некомпактна. Действительно, Макки показал, что если G — дискретная группа преобразований вещественной прямой

$$x \to ax + b,$$