Если G компактна, то прямые интегралы (3) и (4) сводятся к прямым суммам, и мы имеем

$$U_G^{L^I} \cong \sum_{j \in \widehat{G}} n(i, j) U_G^j \quad \text{и} \quad U_K^j = \sum_{n \in \widehat{K}} n(h, j) L_K^h, \tag{5}$$

где $n(i, j)$ — функция из $\widehat{K} \times \widehat{G}$ в множество неотрицательных целых чисел. Этот результат является распространением на компактные группы теоремы 1 для конечных групп.

Дадим теперь два интересных приложения теоремы взаимности.

Пример 1. Пусть G — компактная группа, и пусть $g \to U_g$ — регулярное представление группы G в гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Это представление может рассматриваться как представление U^L группы G, индуцированное тождественным представлением $L = I$ подгруппы $K = \{e\}$, где e — единичный элемент в G. Так как кратность представления L в неприводимом представлении U^j группы G при сужении на K равна $\dim U^j$, то в силу теоремы 2 имеем

$$\text{кратность } n_j \text{ представления } U^j \text{ в } U^L = \dim U^j.$$

Пусть теперь G — некомпактная простая группа Ли. Мы знаем, что всякое нетривиальное унитарное представление группы G бесконечномерно. Следовательно, пользуясь теми же аргументами, заключаем, что каждое нетривиальное унитарное неприводимое представление G, входящее в регулярное представление, содержится бесконечное число раз.

Рассмотрим теперь пример, когда K некомпактна.

Пример 2. Пусть $G = T_4 \rtimes SO(3, 1)$ — группа Пуанкаре, и пусть $K = T_4 \rtimes SO(3)$. Нас интересует кратность представления $\widehat{n}^1 L^1$: $(a, r) \to \widehat{n}^1(a) L_r^1$ подгруппы K в представлении $U^{\widehat{n}L}$ группы G, индуцированном представлением $\widehat{n}L$ подгруппы K. Мы знаем, что $U^{\widehat{n}L}$ неприводимо [теорема (17.1.5)]. Значит, представление $U^{\widehat{n}L}$ при сужении на K содержит $\widehat{n}^1 L^1$ не более чем один раз.

§ 4. Комментарии и дополнения

А. Предположение в теореме 2, что G и K обе являются группами типа I, оказывается существенным, когда K некомпактна. Действительно, Макки показал, что если G — дискретная группа преобразований вещественной прямой

$$x \to ax + b,$$

$a > 0$, a, b — рациональные числа, а K соответствует, например, некомпактной подгруппе $(\{1, b\})$, то теорема взаимности Фробениуса не выполняется ([551], стр. 216)[1]). Однако Маутнер доказал, что если K компактна, то теорема взаимности справедлива даже для групп, которые не являются группами типа I.

Б. Интересно, что классическую теорему взаимности Фробениуса можно переформулировать еще и в другой, более симметричной форме. Действительно, пусть K_1 и K_2 — подгруппы конечной группы G, и пусть U^{L^i} и U^{M^j} — представления G, индуцированные неприводимыми представлениями L^i и M^j подгрупп K_1 и K_2 соответственно. Тогда можно сформулировать обобщенную теорему взаимности в следующем виде.

Теорема 3. *Существует функция $n(\cdot, \cdot)$ из дуальной группы $\hat{K}_1 \times \hat{K}_2$ в множество неотрицательных целых чисел, такая, что*

$$U^{L^i}_{K_2} = \sum_{l \in \hat{K}_2} n(i, l) M^l$$

и

$$U^{M^j}_{K_1} = \sum_{h \in \hat{K}_1} n(h, j) L^h. \tag{6}$$

Заметим, что при $K_2 = G$ эта теорема совпадает с теоремой 1′. Аналогично теорему 2 также можно сформулировать для некомпактных групп в виде, аналогичном теореме 3 ([552], § 7).

В. Техника индуцированных представлений дает полную классификацию неприводимых унитарных представлений регулярных полупрямых произведений (гл. 17). Диксмье [213] показал, что каждое неприводимое унитарное представление связной нильпотентной группы G индуцируется одномерным представлением некоторой подгруппы в G. Эти два примера иллюстрируют эффективность теории индуцированных представлений.

Кириллов предложил вариант теории индуцированных представлений для нильпотентных групп, основанный на методе орбит в пространстве, дуальном к векторному пространству алгебры Ли [455]. Этот метод был затем распространен на другие классы групп. В частности, Ауслендер и Мур [26] дали классификацию индуцированных представлений некоторых разрешимых групп Ли.

Существует интересная связь метода орбит с проблемой квантования квантовой механики. Эта проблема анализировалась Костантом [487], Кирилловым [457] и Симмсом [763].

---

[1]) Заметим, что это — классический пример фон Неймана группы, фактор-представления которой типа II (см., например, [625], с. 558).

Г. Обобщение теории индуцированных представлений на расширения групп также было проведено Макки [555].

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Найдите формулировку индукционно-редукционной теоремы для неунитарных, например неразложимых индуцированных представлений.

§ 2.1. Пусть $G = T^n \rtimes \mathrm{SO}(3, 1)$ и $K = T^n \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Покажите, что представление U^L, индуцированное неприводимым представлением L_k подгруппы K вида

$$k = (a, \varphi) \to L_k = \exp[\mathrm{i}\mathring{p}a] \exp[\mathrm{i}M\varphi], \tag{1}$$

где $\mathring{p} = (m, 0, 0, 0)$ и $M = 0, \pm 1, \pm 2$, приводимо и имеет следующее разложение:

$$U^L = \sum_{J \geqslant |M|}^{\infty} \oplus U^{m, J}. \tag{2}$$

§ 2.2. Пусть $U^{M_1 J_1}$ и $U^{M_2 J_2}$, $M_1, M_2 \in (0, \infty)$, $J_1, J_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, — два неприводимых представления группы Пуанкаре. Покажите, что

а) для $M_1, M_2 > 0$ мы имеем

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{M_2, J_2} \cong \int_{M_1+M_2}^{\infty} \mathrm{d}M \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{J=|s-l|}^{s+l} \oplus U^{M, J}, \tag{3}$$

б)

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_{M_1}^{\infty} \mathrm{d}M \sum_{l=|J_2|}^{\infty} \sum_{J=|l-J_1|}^{l+J_1} \oplus U^{M, J}, \tag{4}$$

в)

$$U^{0, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}M \sum_{J=|J_1-J_2|}^{\infty} \oplus U^{M, J}. \tag{5}$$

Указание: воспользуйтесь теоремой 2.2.

§ 2.3. Пусть $U^{(J_1, J_2)}$ — конечномерное представление группы Пуанкаре, получаемое посредством подъема представления $D^{(J_1, J_2)}$ группы $\mathrm{SL}(2, C)$ до группы Пуанкаре. Является ли тензорное произведение

$$U^{(J_1, J_2)} \otimes U^{M, J}$$

приводимым?