

Г. Обобщение теории индуцированных представлений на расширения групп также было проведено Макки [555].

§ 5. Упражнения

§ 1.1. Найдите формулировку индукционно-редукционной теоремы для неунитарных, например неразложимых индуцированных представлений.

§ 2.1. Пусть $G = T^n \rtimes SO(3, 1)$ и $K = T^n \rtimes SO(2)$. Покажите, что представление U^L , индуцированное неприводимым представлением L_k подгруппы K вида

$$k = (a, \varphi) \rightarrow L_k = \exp [i\overset{\circ}{pa}] \exp [iM\varphi], \quad (1)$$

где $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$ и $M = 0, \pm 1, \pm 2$, приводимо и имеет следующее разложение:

$$U^L = \sum_{J \geqslant |M|}^{\infty} \oplus U^{m, J}. \quad (2)$$

§ 2.2. Пусть U^{M_1, J_1} и U^{M_2, J_2} , $M_1, M_2 \in (0, \infty)$, $J_1, J_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ — два неприводимых представления группы Пуанкаре. Покажите, что

а) для $M_1, M_2 > 0$ мы имеем

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{M_2, J_2} \cong \int_{M_1+M_2}^{\infty} dM \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=|J_1-J_2|}^{|J_1+J_2|} \sum_{J=s-l}^{s+l} \oplus U^{M, J}, \quad (3)$$

б)

$$U^{M_1, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_{M_1}^{\infty} dM \sum_{l=|J_2|}^{\infty} \sum_{J=l-J_1}^{l+J_1} \oplus U^{M, J}, \quad (4)$$

в)

$$U^{0, J_1} \otimes U^{0, J_2} \cong \int_0^{\infty} dM \sum_{J=|J_1-J_2|}^{\infty} \oplus U^{M, J}. \quad (5)$$

Указание: воспользуйтесь теоремой 2.2.

§ 2.3. Пусть $U^{(J_1, J_2)}$ — конечномерное представление группы Пуанкаре, получаемое посредством подъема представления $D^{(J_1, J_2)}$ группы $SL(2, C)$ до группы Пуанкаре. Является ли тензорное произведение

$$U^{(J_1, J_2)} \otimes U^{M, J}$$

приводимым?

§ 2.4. Пусть $H = H^{M_1, J_1} \otimes H^{M_2, J_2}$ — несущее пространство тензорного произведения $U^{M_1, J_1} \otimes U^{M_2, J_2}$. Покажите, что операторы

$$\lambda_i = [(P_i^\mu P_\mu)^2 - m_i^2 M^2]^{-1/2} \zeta_i^\mu P_\mu, \quad i = 1, 2,$$

где

$$P^\mu := P_1^\mu + P_2^\mu, \quad M^2 = P^\mu P_\mu, \quad m_i^2 = P_i^\mu P_{i\mu}$$

и

$$\zeta_i^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} M_{i\nu\rho} P_{i\lambda},$$

являются инвариантными операторами в H . Покажите, что в системе центра масс мы имеем

$$\lambda_i = \mathbf{P}_i \mathbf{J}_i / |\mathbf{P}_i|, \quad i = 1, 2,$$

т. е. операторы λ_i являются операторами спиральности.