Глава 19

Индуцированные представления полупростых групп Ли

Построим теперь отдельные серии унитарных неприводимых представлений полупростых классических групп Ли, пользуясь методом индуцированных представлений. Множество унитарных представлений полупростых некомпактных групп в отличие от множества конечномерных представлений является весьма богатым. Обычно мы различаем четыре серии унитарных представлений: основная невырожденная, основная вырожденная, дополнительная невырожденная и дополнительная вырожденная серии. Соответствующие серии определяются различными наборами инвариантных чисел: например, в случае группы SL (n, C) основная невырожденная серия определяется при помощи $2n-2$ инвариантных чисел, а последовательные вырожденные серии — при помощи $2n-2k$, $k=2, 3, \ldots, n-1$, инвариантных чисел.

В § 1 мы излагаем общую теорию индуцированных представлений полупростых групп Ли. Построение индуцированных представлений основывается на индуцировании представления с неприводимых представлений минимальной параболической подгруппы группы G. Мы анализируем также вопросы неприводимости и неэквивалентности получающихся индуцированных представлений. Затем мы подробно анализируем построение индуцированных представлений основной, дополнительной и вырожденных серий для групп SL (n, C) и GL (n, C), которые часто рассматриваются в качестве групп симметрии различных физических систем. Наконец, в § 6 мы даем краткое обсуждение свойств индуцированных представлений других классических групп Ли.

Примечательно, что та же самая техника индуцированных представлений, которая использовалась нами в гл. 8 для построения всех неприводимых конечномерных представлений классических групп Ли, позволяет нам в данном случае строить неприводимые бесконечномерные унитарные представления классических групп. Соответствующие формулы, которые дают реализацию конечно- и бесконечномерных представлений, почти тождественны [см. (8.3.4) и (3.16)].

§ 1. Индуцированные представления полупростых групп Ли

В этом параграфе мы даем построение индуцированных представлений для полупростых классических групп Ли и приводим некоторые недавно полученные результаты, касающиеся неприводимости.

Пусть G — связная полупростая группа Ли с конечным центром, $G = KAN$ — разложение Ивасавы для G, $P = MAN$ — соответствующая минимальная параболическая подгруппа в G (определения см. в гл. 3, § 6, Г). Пусть L — конечномерное представление подгруппы P. Следующая лемма описывает строение L.

Лемма 1. *Конечномерное непрерывное неприводимое представление L подгруппы P в пространстве H имеет вид*

$$L_{man} = \chi(a) L_m, \quad m \in M, \quad a \in A, \quad n \in N, \tag{1}$$

где χ — характер подгруппы A, а $m \to L_m$ — непрерывное неприводимое представление M в H.

Доказательство. По теореме Ивасавы AN связна и разрешима. Следовательно, в силу теоремы Ли существует ненулевой вектор $u_0 \in H$, такой, что $L_{an}u_0 = \chi(an)\, u_0$, где χ — одномерное непрерывное представление подгруппы AN, так как N является производной группой группы AN, $\chi(n) = 1$ для всех $n \in N$. Поскольку $L_{an}L_m u_0 = \chi(a)\, L_m u_0$, линейная оболочка $L_m u_0$ является L-стабильной; неприводимость L означает, что эта линейная оболочка должна совпадать с H. Поэтому $L_{an}u = \chi(a)\, u$ для всех $a \in A$, $n \in N$ и $u \in H$.

Пусть χL — конечномерное неприводимое унитарное представление подгруппы P, $X = G/P$ или $X = P \backslash G$, и $\mu(\cdot)$ — квазиинвариантная мера на X. Действие индуцированного представления $U^{\chi L}$ группы G в пространстве $H^{\chi L} = L^2(X, \mu)$ задается по формуле (16.1.15), если пользоваться правым сдвигом $x \to xg$, или по формуле (16.1.47), если пользоваться левым сдвигом $x \to g^{-1}x$.

Унитарные представления $U^{\chi L}$ группы G, индуцированные посредством конечномерных неприводимых представлений χL подгруппы P, называются *основной P-серией* унитарных представлений группы G.

Заметим, что описанная конструкция индуцированного представления может быть использована как для комплексных, так и для вещественных полупростых групп Ли. Если G комплексна, то, согласно гл. 3, § 6, В, K является компактной формой группы G, M есть максимальный тор в K, а MA — подгруппа Картана группы G. Таким образом, представления основной P-серии

группы G являются унитарными представлениями G, индуцированными с подгруппы Картана группы G; следовательно, инвариантные числа, характеризующие представления основной P-серии группы G, — это пары, состоящие из одного целого числа и одного вещественного, которые задают характеры подгруппы MA.

Пример 1. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, R)$. Подгруппы K, A, N и M были даны в примере 3.6.4. Поскольку $M = \{e, -e\}$, она имеет только два неприводимых неэквивалентных представления, задаваемые согласно

$$L_m^+ = 1, \quad m \in M, \quad \text{и} \quad L_m^- = m_1, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \in M. \tag{2}$$

Следовательно, в силу леммы 1 неприводимые конечномерные унитарные представления подгруппы $P = MAN$ одномерны и имеют вид

$$man = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \to \chi(a) L_m^{\pm}, \tag{3}$$

где $\chi(a) = |a|^{ir}$, $r \in R$. Поэтому основная P-серия унитарных представлений $U^{\chi L}$ группы $\mathrm{SL}(2, R)$ состоит из двух серий $U^{r,+}$ и $U^{r,-}$. Явная реализация этих представлений дана в примере 16.1.2.

Одной из основных проблем в теории представлений является определение неприводимости и эквивалентности представлений $U^{\chi L}$ основной P-серии. Чтобы сформулировать соответствующие теоремы, мы должны ввести действие группы Вейля на представления χL подгруппы MA и понятие расширяемых представлений. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ — алгебры Ли групп G и A соответственно и W — группа Вейля пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$; пусть χL — неприводимое конечномерное представление MA и $w \in W$. Тогда $w\chi L$ обозначает представление MA, задаваемое согласно

$$ma \to \chi(m_w^{*-1} a m_w^*) L_{m_w^{*-1} m m_w^*}, \quad m \in M, \quad a \in A, \tag{4}$$

где m_w^* — произвольный элемент нормализатора M^* подгруппы A в K, ассоциированный с w (относительно свойств M^* см. гл. 3, § 6, Г).

Предположим, что нильпотентная подгруппа N в разложении Ивасавы отвечает корневым пространствам положительных ограниченных корней алгебры Ли $\mathfrak{a}$, и пусть N^- — нильпотентная подгруппа в G, отвечающая корневым пространствам отрицательных ограниченных корней. Пусть L — унитарное неприводимое представление M в гильбертовом пространстве H. Мы говорим, что пара (L, H) расширяема, если существует неприводимый конечномерный комплексный G-модуль V, такой что M-модуль

$$V^{N^-} = \{u \in V;\ nu = u \text{ для всех } n \in N^-\} \tag{5}$$

эквивалентен (L, H). Мы называем V расширением представления L.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть χL — конечномерное представление P. Тогда*

1) *если $\chi L \not\sim w\chi L$ для всякого $w \neq I$ из W, то $U^{\chi L}$ неприводимо;*

2) *$U^{\chi' L'} \sim U^{\chi'' L''}$ тогда и только тогда, когда существует $w \in W$, такой, что $\chi' L' \sim w\chi'' L''$;*

3) *если $U^{\chi L}$ приводимо, то*

$$U^{\chi L} = \sum_{i=1}^{r} U^i,$$

где U^i — неприводимое унитарное подпредставление представления $U^{\chi L}$, $U^i \not\sim U^{\chi' L'}$ при любом представлении $\chi' L'$ подгруппы P, а $r \leqslant m$ — кратность представления L в V, как в M-модуле.

(Доказательство этих результатов было в основном дано Брюа [150]. Верхний предел на r, указанный в п. 3, был получен Уоллачем [827].)

Теорема 2 дает эффективное средство при проверке неприводимости унитарных представлений основной P-серии. Проиллюстрируем ее силу на двух классах групп.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G — связная комплексная полупростая группа Ли. Тогда каждое представление основной P-серии неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае MA является подгруппой Картана в G, а W действует на MA как группа Вейля группы G относительно MA. Пусть χ — характер подгруппы A и L — характер M. Пусть V — конечномерное неприводимое (индуцированное) представление группы G с младшим целочисленным весом L, построенное в гл. 8, § 2. Подгруппу N^- можно отождествить с подгруппой Z разложения Гаусса. Значит, M-модуль V^{N^-}, определенный согласно (5), ввиду следствия 1 теоремы 8.2.2 является одномерным, а в силу соотношения (8.2.18) эквивалентен (L, H). Следовательно, V является расширением L. Но из следствия 1 теоремы 8.2.2 вытекает, что кратность L в V, как в M-модуле, равна единице. Следовательно, согласно утверждению (3) теоремы 2, представление $U^{\chi L}$ неприводимо.

Второе приложение касается групп $\mathrm{SL}(n, R)$. В этом случае $K = \mathrm{SO}(n)$, а в качестве A можно взять множество всех диагональных матриц из G с положительными элементами. N — группа всех верхних треугольных матриц с единицами на диагонали. Централизатором M является группа всех диагональных элементов из G с числами ± 1 на диагонали. Пусть $m = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_n)$ — элемент из M; положим $\varepsilon_0(m) = 1$ и $\varepsilon_i(m) = m_i$, $i = 1, \ldots$

..., $n-1$. Тогда всякий нетривиальный унитарный характер группы $\mathcal{M}$ имеет вид $\varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n-1$. Положим $\varepsilon_n = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $G = \mathrm{SL}(n, R)$. 1) Если n нечетное, то каждый элемент основной P-серии неприводим. 2) Если n четное, χ — характер A и*

$$L = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_j}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < n-1, \quad j \neq \frac{n}{2}, \tag{6}$$

то представление $U^{\chi L}$ неприводимо. Если $j = n/2$ и $U^{\chi L}$ приводимо, то

$$U^{\chi L} = U^1 \oplus U^2$$

является прямой суммой неприводимых унитарных представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа Вейля W действует на M, переставляя величины на диагонали; значит, W также переставляет $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Рассмотрим теперь представления V^i, $i = 0, \ldots, n-1$, где V^0 — тривиальное представление группы G, V^1 — стандартное (матричное) действие группы G на C^n, а $V^i = V^1 \wedge V^1 \wedge \ldots \wedge V^1$ (i раз) является поливекторным представлением группы G, которое определяется старшим весом $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (гл. 8, § 3). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в C^n. Тогда, если $m \in M$, то $me_i = \varepsilon_i(m)\, e_i$. Значит, в общем случае V^k как M-модуль разлагается в прямую сумму:

$$V^0 = 1, \quad V^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k < n-1} \oplus\, \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-k} \leqslant n-1} \oplus\, \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_{n-k}}, \quad n-1 \geqslant k > 0. \tag{7}$$

Пусть χ — характер подгруппы A, а L — характер M, который может быть взят в виде $L = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, $r = 0, \ldots, n-1$. Если $r = 0$, то ε_0 является действием M на $(V^0)^{N^-}$; значит, V^0 является расширением L. Аналогично, если $L = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, то V^{n-r} является расширением L; действительно, M-модуль $(V^{n-r})^{N^-}$ ввиду следствия 1 теоремы 8.2 является одномерным с младшим целочисленным весом L. Но если n нечетное, в силу соотношения (7) каждое представление M появляется в точности один раз; согласно теореме 2 (3), отсюда следует утверждение (1) теоремы 4. Аналогично с помощью (7) и теоремы 2 проверяется утверждение (2).

ПРИМЕР 2. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, R)$. Группа Вейля $W = M^*/M$ для $\mathrm{SL}(2, R)$ вычислена в примере 3.6.4, $W = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Поскольку действие W на подгруппу A имеет вид

$$w_1^{-1}aw_1 = a, \quad w_2^{-1}aw_2 = a^{-1}, \tag{8}$$

а действие W на M тривиально, представления $L^{r,\pm}$ и $L^{-r,\pm}$ группы MA удовлетворяют соотношению

$$w_2 L^{r,\pm} = L^{-r,\pm}.$$

Следовательно, по теореме 2 (2) индуцированные представления $U^{r_1,\pm}$ и $U^{r_2,\pm}$ являются эквивалентными, если $r_2 = -r_1$. Если теперь $r = 0$, то представление $L^- = \varepsilon_1$ подгруппы M содержится дважды в представлении V^1 группы SL (2, R), рассматриваемом как M-модуль. Следовательно, в силу теоремы 2 (3) представление $U^{0,-}$ является прямой суммой двух неприводимых представлений. Аналогично с помощью теорем 2 и 3 проверяется, что $U^{r,+}$ при $r \neq 0$ и $U^{r,-}$ неприводимы.

§ 2. Свойства группы SL (n, C) и ее подгрупп

В случае $G = \mathrm{SL}\,(n, C)$ K является компактной формой G, M — максимальный тор в K, а MA — подгруппа Картана D группы G, состоящая из всех унимодулярных диагональных $n \times n$-матриц. Параболическая подгруппа $P = MAN$ состоит из всех верхних треугольных унимодулярных матриц. Сравнение с разложением Гаусса группы SL (n, C)

$$\mathrm{SL}\,(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}DZ},$$

которое дано в гл. 3, § 6, А, показывает, что параболическая группа P совпадает с подгруппой $\mathfrak{Z}D$ группы SL (n, C). Этот факт означает, что разложение Гаусса играет важную роль в явном построении унитарных представлений, индуцированных с подгруппы P.

Напомним теперь основные свойства разложения Гаусса для SL (n, C). Подгруппа $P = \mathfrak{Z}D$ состоит из верхних треугольных матриц, диагональные элементы которых удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{n} k_{ii} = 1, \tag{1}$$

и является разрешимой. Коммутативная (картановская) подгруппа D состоит из диагональных матриц, также удовлетворяющих условию (1). Подгруппа $\mathfrak{Z}$ состоит из верхних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами. Подгруппа Z состоит из нижних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами и также является нильпотентной. Подгруппа $\mathfrak{Z}$ является нормальной подгруппой группы P, а P является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$.