Поскольку действие W на подгруппу A имеет вид

$$w_1^{-1}aw_1 = a, \quad w_2^{-1}aw_2 = a^{-1}, \tag{8}$$

а действие W на M тривиально, представления $L^{r,\pm}$ и $L^{-r,\pm}$ группы MA удовлетворяют соотношению

$$w_2 L^{r,\pm} = L^{-r,\pm}.$$

Следовательно, по теореме 2 (2) индуцированные представления $U^{r_1,\pm}$ и $U^{r_2,\pm}$ являются эквивалентными, если $r_2 = -r_1$. Если теперь $r = 0$, то представление $L^- = \varepsilon_1$ подгруппы M содержится дважды в представлении V^1 группы SL (2, R), рассматриваемом как M-модуль. Следовательно, в силу теоремы 2 (3) представление $U^{0,-}$ является прямой суммой двух неприводимых представлений. Аналогично с помощью теорем 2 и 3 проверяется, что $U^{r,+}$ при $r \neq 0$ и $U^{r,-}$ неприводимы.

§ 2. Свойства группы SL (n, C) и ее подгрупп

В случае $G = \mathrm{SL}\,(n, C)$ K является компактной формой G, M — максимальный тор в K, а MA — подгруппа Картана D группы G, состоящая из всех унимодулярных диагональных $n \times n$-матриц. Параболическая подгруппа $P = MAN$ состоит из всех верхних треугольных унимодулярных матриц. Сравнение с разложением Гаусса группы SL (n, C)

$$\mathrm{SL}\,(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}DZ},$$

которое дано в гл. 3, § 6, А, показывает, что параболическая группа P совпадает с подгруппой $\mathfrak{Z}D$ группы SL (n, C). Этот факт означает, что разложение Гаусса играет важную роль в явном построении унитарных представлений, индуцированных с подгруппы P.

Напомним теперь основные свойства разложения Гаусса для SL (n, C). Подгруппа $P = \mathfrak{Z}D$ состоит из верхних треугольных матриц, диагональные элементы которых удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{n} k_{ii} = 1, \tag{1}$$

и является разрешимой. Коммутативная (картановская) подгруппа D состоит из диагональных матриц, также удовлетворяющих условию (1). Подгруппа $\mathfrak{Z}$ состоит из верхних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами. Подгруппа Z состоит из нижних треугольных матриц с равными единице диагональными элементами и также является нильпотентной. Подгруппа $\mathfrak{Z}$ является нормальной подгруппой группы P, а P является полупрямым произведением $\mathfrak{Z} \rtimes D$.

Напомним, что разложение Гаусса SL $(n, C) = \overline{\mathfrak{Z}DZ}$ означает, что почти каждый элемент $g \in$ SL (n, C) может быть однозначно разложен в виде

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in \mathfrak{Z}, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{2а}$$

или

$$g = kz, \tag{2б}$$

где

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \in P = \mathfrak{Z}D, \tag{3}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{31} & z_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{n,\,n-1} & 1 \end{bmatrix} \in Z. \tag{4}$$

Матричные элементы z_{pq}, $n \geqslant p > q > 0$, элемента группы $z \in Z$ являются произвольными комплексными числами. Значит, мы можем представить их в виде $z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq}$. Мы знаем, благодаря результатам гл. 3, § 11 [соотношение (38)], что группа треугольных матриц с равными единице диагональными элементами обладает инвариантной мерой, которую можно взять в виде

$$d\mu(z) = \prod_{p,\,q=1} dx_{pq}\, dy_{pq}, \quad n \geqslant p > q > 0. \tag{5}$$

В дальнейшем эту меру на группе Z мы используем для построения пространства $L^2(Z, \mu)$, в котором реализуются неприводимые унитарные представления SL (n, C).

§ 3. Основная невырожденная серия унитарных представлений группы SL (n, C)

Применим теперь общий формализм индуцированных представлений с целью построить класс неприводимых унитарных представлений SL (n, C). Напомним основные стадии построения индуцированных представлений. Пусть P — замкнутая подгруппа группы G, $X = P\backslash G$, и μ — квазиинвариантная мера на X. Пусть $k \to L_k$ — унитарное представление P в гильбертовом пространстве H. Тогда пространство H^L представления U^L, индуцирован-