рожден. Любое другое представление T', в котором m_L не является старшим весом, определяется старшим весом m', который старше, чем m_L.

Следующий пример иллюстрирует содержание теоремы 4.

Пример 2. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, C)$, и пусть U^L — представление основной серии, индуцированное представлением L подгруппы P. Представление L определяется характером $\chi(\delta) = |\delta|^{m_2+i\rho_2}\delta^{-m_2}$, $\delta = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \in D$. Неприводимое представление T^J группы SU (2) определяется при помощи J, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Пусть Y^J_m, $m = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$, — базис пространства представления T^J. Хорошо известно, что элемент $\gamma \in M$,

$$\gamma = \begin{bmatrix} \exp(-i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{bmatrix},$$

соответствует вращению вокруг оси z на угол 2φ. Значит, $T^J_\gamma Y^J_m = \exp(2im\varphi)\, Y^J_m$, и каждое представление $\varphi \to \exp(2im\varphi)$ подгруппы M появляется с кратностью один. Следовательно, T^J при сужении на M (т. е. T^J_M) содержит L_M тогда и только тогда, когда $m_2/2$ является одним из чисел $J, J-1, \ldots, -J$. Таким образом, если $J \geqslant m_2/2$, представление T^J входит в $U^L_{\mathrm{SU}(2)}$ с кратностью один, т. е.

$$U^L_{\mathrm{SU}(2)} = \sum_{J=\left|\frac{m_2}{2}\right|}^{\infty} \oplus\, T^J(\mathrm{SU}(2)). \tag{24}$$

Заметим, что два неэквивалентных представления U^L и $U^{L'}$, для которых $\rho_2 \neq \rho_2'$, а $m_2 = m_2'$, имеют одинаковое разложение (24).

§ 4. Основные вырожденные серии группы SL (n, C)

Опишем теперь так называемые *основные вырожденные серии*. Эти серии обладают различной степенью вырожденности и описываются при помощи $2n - 2k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, инвариантных чисел соответственно.

Пусть

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r, \quad r \geqslant 2, \quad r \neq n, \tag{1}$$

— разбиение целого числа n на положительные целые числа, и пусть

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{r1} \cdots g_{rr} \end{bmatrix} \tag{2}$$

— разложение элемента $g \in \mathrm{SL}(n, C)$ на матрицы g_{pq}, $p, q = 1, 2, \ldots, r$, с n_p строками и n_q столбцами. Матричные блоки g_{pq} выбираем таким образом, чтобы, будучи подставленными в (2), они давали в точности матрицу $g \in \mathrm{SL}(n, C)$. Введем, кроме того, матрицы k и z, $k, z \in \mathrm{SL}(n, C)$, вида

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1r} \\ 0 & k_{22} \cdots k_{2r} \\ & \vdots \\ 0 \ldots & k_{rr} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & \cdots 0 \\ z_{21} & I_{n_2} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ z_{r1} & z_{r2} & \cdots I_{n_r} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где k_{pq} и z_{pq} — произвольные матрицы размерности $n_p \times n_q$, а I_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots, r$, — квадратные единичные матрицы порядка n_k. Множества всех матриц k и z, задаваемых согласно (3), являются подгруппами в $\mathrm{SL}(n, C)$, которые обозначим через $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ соответственно.

Следующая лемма дает разложение элемента $g \in \mathrm{SL}(n, C)$, аналогичное разложению (2.2б).

Лемма 1. *Почти каждый элемент $g \in \mathrm{SL}(n, C)$ может быть однозначно представлен в виде*

$$g = k_g z_g, \tag{4}$$

где $k_g \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $z_g \in Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Доказательство проводится непосредственно, и мы его опускаем.

Унитарные вырожденные представления группы $\mathrm{SL}(n, C)$ строятся аналогично тому, как строились невырожденные. Поэтому ограничимся обсуждением только основных шагов.

Построим унитарные представления U^L группы $\mathrm{SL}(n, C)$, индуцированные одномерными представлениями $k \to L_k$ подгруппы $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Пусть $\Lambda_i = \det k_{ii}$, где k_{ii} — $n_i \times n_i$-матрицы, выписанные в (3). Тогда отображение

$$L : k \to \chi(k) = \prod_{s=2}^{r} |\Lambda_s|^{m_s + i\rho_s} \Lambda_s^{-m_s}, \tag{5}$$

где $\rho_2, \ldots, \rho_r$ — произвольные вещественные числа, а $m_2, \ldots, m_r$ — произвольные целые числа, задает одномерное представле-

ние подгруппы $D_{n_1, \ldots, n_r}$, состоящей из всех матриц вида $\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & k_{rr} \end{bmatrix}$. Подгруппа $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2, \ldots, n_r}$, состоящая из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ & I_{n_2} & k_{23} \cdots & k_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & I_{n_k} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

является нормальной подгруппой в $P_{n_1, \ldots, n_r}$, и $P_{n_1, \ldots, n_r} = \mathfrak{Z}_{n_1, \ldots, n_r} \rtimes D_{n_1, \ldots, n_r}$. Значит, представление (5) подгруппы $D_{n_1, \ldots, n_r}$ можно поднять до одномерного представления L подгруппы $P_{n_1, \ldots, n_r}$. Представление U^L группы SL (n, C), индуцированное представлением L подгруппы $P_{n_1, \ldots, n_r}$, реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$, где $X = P_{n_1, \ldots, n_r} \backslash G$, а μ — квазиинвариантная мера в X. Однако, воспользовавшись разложением (4), можно показать, что групповое пространство группы $Z_{n_1, \ldots, n_r}$ совпадает с X с точностью до подмножества меньшей размерности в X (см. лемму 3.1). Следовательно, мы можем взять в качестве меры μ инвариантную меру на подгруппе $Z_{n_1, \ldots, n_r}$. Эта мера индуцируется мерой (2.5) на Z и задается формулой

$$d\tilde{\mu}(z) = \prod dx_{pq}\, dy_{pq}, \tag{7}$$

где появляются только те множители $dx_{pq}\, dy_{pq}$, которые соответствуют матричным элементам z_{ij}, $i > j$, матрицы $z \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$.

Пространство $L^2(Z_{n_1, \ldots, n_r}, \tilde{\mu})$ вырожденного представления U^L состоит из всех функций $\varphi(z)$, измеримых в $Z_{n_1, \ldots, n_r}$, которые удовлетворяют условию

$$\int |\varphi(z)|^2 d\tilde{\mu}(z) < \infty. \tag{8}$$

Представление U^L группы SL (n, C) задается явно в пространстве $L^2(Z_{n_1, \ldots, n_r}, \tilde{\mu})$ формулой (3.3), т. е.

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}}\, L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}), \tag{9}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{z}$ — факторы из разложения (4) элемента $\tilde{g} \equiv zg$, т. е. $zg = \tilde{k}\tilde{z}$. Чтобы завершить построение U^L, необходимо еще вычислить производную Радона—Никодима $d\tilde{\mu}(\tilde{z})/d\tilde{\mu}(z)$. Вычисления, аналогичные тем, которые проводились в лемме 3.2, дают

$$\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)} = |\Lambda_2|^{-2(n_1+n_2)} |\Lambda_3|^{-2(n_1+2n_2+n_3)} |\Lambda \quad {}^{-2(n_1+2n_2+\cdots+2n_{r-1}+2n_r)}, \tag{10}$$

где Λ_s, $s = 2, \ldots, r$, обозначают детерминанты соответствующих блочно-диагональных элементов элемента $\tilde{k}$.

Заметим, что количество инвариантных чисел ρ_s, m_s зависит от разбиения n на n_i, выписанного в (1). В случае $r = 2$ мы получаем *так называемую наиболее вырожденную серию* SL (n, C).

Пример 1. Рассмотрим наиболее вырожденные представления SL (n, C), которые определяются следующим разбиением числа n:

$$n \equiv n_1 + n_2 = (n-1) + 1. \tag{11}$$

В этом случае подгруппы $Z_{n-1,1}$ и $P_{n-1,1}$ состоят из матриц вида

$$z = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Здесь I_{n_1} — единичная $(n-1) \times (n-1)$-матрица,

$$z = (z_{n,1}, z_{n,2}, \ldots, z_{n,n-1}) \equiv (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$$

— $1 \times (n-1)$-матрица, k_{11} является $(n-1) \times (n-1)$-матрицей, k_{12} является $(n-1) \times 1$-матрицей, а k_{22} — комплексное число. Заметим, что в рассматриваемом случае $\Lambda_2 = \det k_{22} = k_{22}$.

Следовательно, из соотношений (10) и (5) мы имеем

$$\sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}} = |\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)} \Lambda_2^{-m_2} = |\tilde{k}_{22}|^{m_2+i\rho_2-n} \tilde{k}_{22}^{-m_2}.$$

Поэтому, чтобы явно определить действие оператора U_g^L, мы должны найти вид $\tilde{k}_{22}$ и $\tilde{z}$. Сравнивая матричные элементы матрицы $\tilde{g} = zg$ с матричными элементами произведения $\tilde{k}\tilde{z}$, получаем

$$(\tilde{z})_{np} \equiv (\tilde{z})_p = \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jp} z_j + g_{np}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn} z_j + g_{nn}\right) \tag{13}$$

и

$$\tilde{k}_{22} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn} z_j + g_{nn}\right). \tag{14}$$

Поэтому явный вид действия оператора U_g^L в пространстве $L^2(Z_{n-1,1}, \tilde{\mu})$ задается формулой

$$U_g^L\varphi(\ldots, z_p, \ldots) = \left|\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right|^{m_2+i\rho_2-n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right)^{-m} \times$$
$$\times \varphi\left(\ldots, \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jp}z_j + g_{np}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right), \ldots\right). \qquad (15)$$

Равенство (13) показывает, что SL (n, C) действует на многообразии $Z_{n-1,1}$ как группа проективных преобразований, т. е. $Z_{n-1,1}$ является $(n-1)$-мерным проективным пространством.

Применяя ИР-теорему, легко показать, что всякое представление основной вырожденной серии также является неприводимым. Можно также получить аналоги теорем 3.3 и 3.4 для вырожденных серий (см. [315], гл. 3.4).

§ 5. Дополнительные невырожденная и вырожденные серии

До сих пор мы рассматривали унитарные представления U^L группы G, индуцированные *унитарными* представлениями $k \to L_k$ подгруппы $P \subset G$. Эти представления были реализованы при помощи функций на G, удовлетворяющих условию

$$u(kg) = L_k u(g). \qquad (1)$$

Действие представления U_g^L в пространстве H^L задавалось формулой (3.3), а скалярное произведение было определено согласно (3.2).

Можно было бы попытаться получить унитарное индуцированное представление U^L группы G из *неунитарного* представления L подгруппы P. Укажем теперь точное построение таких представлений. Новый класс представлений G, индуцированных с помощью неунитарных представлений подгруппы P, — это класс дополнительных серий представлений.

Ясно, что скалярное произведение (3.2) для неунитарного представления L подгруппы P не может быть инвариантным относительно U^L. Оказывается, однако, что достаточно заменить (3.2) скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ вида

$$(\varphi, \psi)_{H^L} = \int_{X\times X} K(x_1, x_2)(\varphi(x_1), \psi(x_2))_H \, d\mu(x_1)\, d\mu(x_2),$$
$$x \in X = P\backslash G. \qquad (2)$$

Ядро $K(x_1, x_2)$ выбирается таким образом, что оно компенсирует добавочный множитель, появляющийся за счет неунитарности представления L подгруппы P.