Поэтому явный вид действия оператора U_g^L в пространстве $L^2(Z_{n-1,1}, \tilde{\mu})$ задается формулой

$$U_g^L\varphi(\ldots, z_p, \ldots) = \left|\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right|^{m_2+i\rho_2-n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right)^{-m} \times$$
$$\times \varphi\left(\ldots, \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jp}z_j + g_{np}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{jn}z_j + g_{nn}\right), \ldots\right). \qquad (15)$$

Равенство (13) показывает, что SL (n, C) действует на многообразии $Z_{n-1,1}$ как группа проективных преобразований, т. е. $Z_{n-1,1}$ является $(n-1)$-мерным проективным пространством.

Применяя ИР-теорему, легко показать, что всякое представление основной вырожденной серии также является неприводимым. Можно также получить аналоги теорем 3.3 и 3.4 для вырожденных серий (см. [315], гл. 3.4).

§ 5. Дополнительные невырожденная и вырожденные серии

До сих пор мы рассматривали унитарные представления U^L группы G, индуцированные *унитарными* представлениями $k \to L_k$ подгруппы $P \subset G$. Эти представления были реализованы при помощи функций на G, удовлетворяющих условию

$$u(kg) = L_k u(g). \qquad (1)$$

Действие представления U_g^L в пространстве H^L задавалось формулой (3.3), а скалярное произведение было определено согласно (3.2).

Можно было бы попытаться получить унитарное индуцированное представление U^L группы G из *неунитарного* представления L подгруппы P. Укажем теперь точное построение таких представлений. Новый класс представлений G, индуцированных с помощью неунитарных представлений подгруппы P, — это класс дополнительных серий представлений.

Ясно, что скалярное произведение (3.2) для неунитарного представления L подгруппы P не может быть инвариантным относительно U^L. Оказывается, однако, что достаточно заменить (3.2) скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ вида

$$(\varphi, \psi)_{H^L} = \int_{X\times X} K(x_1, x_2)(\varphi(x_1), \psi(x_2))_H \, d\mu(x_1)\, d\mu(x_2),$$
$$x \in X = P\backslash G. \qquad (2)$$

Ядро $K(x_1, x_2)$ выбирается таким образом, что оно компенсирует добавочный множитель, появляющийся за счет неунитарности представления L подгруппы P.

А. *Дополнительная серия для* SL (2, *C*)

Прежде всего построим дополнительную серию представлений для SL (2, *C*) (см. пример 3.1). В этом случае подгруппа P состоит из матриц вида

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{11}k_{22} = 1.$$

Находим унитарные представления U^L группы SL (2, *C*), индуцированные одномерными неунитарными представлениями P, задаваемыми по формуле

$$k \to L_k = |k_{22}|^{m+i\rho} k_{22}^{-m}, \tag{3}$$

где ρ теперь не является вещественным.

Воспользовавшись формулой (3.21), получаем

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}}\, L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}) = |\beta z + \delta|^{m+i\rho-2} (\beta z + \delta)^{-m} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \tag{4}$$

т. е. действие представления U^L в пространстве H^L фактически такое же, как и в случае основной серии. Однако скалярное произведение в H будет другим. Найдем его, пользуясь требованиями инвариантности и положительной определенности:

$$(U_g^L \varphi,\ U_g^L \psi) = (\varphi,\ \psi) \equiv \int K(z_1',\ z_2')\, \varphi(z_1')\, \overline{\psi}(z_2')\, dz_1'\, dz_2', \tag{5}$$

где мы положили $d\mu(z) = dz \equiv dx\, dy$.

Лемма 1. *Ядро* $K(z_1,\ z_2)$ *имеет вид*

$$K(z_1,\ z_2) = |z_1 - z_2|^{-2+\sigma}, \tag{6}$$

где $\sigma = -i\rho$ *и* $0 < \sigma < 2$.

Доказательство. Положим $z_1' = \tilde{z}_1 = \dfrac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}$ и $z_2' = \tilde{z}_2$ в правой части равенства (5). С помощью формулы $d\tilde{z}/dz = |\beta z + \delta|^{-4}$ мы тогда получаем

$$(\varphi,\ \psi) = \int K(\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2)\, \varphi(\tilde{z}_1)\, \overline{\psi(\tilde{z}_2)}\, |\beta z_1 + \delta|^{-4} |\beta z_2 + \delta|^{-4}\, dz_1\, dz_2.$$

Далее, подставляя выражение (4) в левую часть равенства (5), с учетом произвольности $\varphi(\tilde{z}_1)$ и $\psi(\tilde{z}_2)$ получаем

$$K(z_1,\ z_2)\, |\beta z_1 + \delta|^{m+i\rho-2} (\beta z_1 + \delta)^{-m} |\beta z_2 + \delta|^{m-i\rho-2} \overline{(\beta z_2 + \delta)}^{-m} =$$
$$= K\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta},\ \frac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta}\right) |\beta z_1 + \delta|^{-4} |\beta z_2 + \delta|^{-4}.$$

Следовательно,

$$K\left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}, \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}\right) =$$
$$= K(z_1, z_2)\,|\beta z_1+\delta|^{m+i\rho+2}(\beta z_1+\delta)^{-m}\,|\beta z_2+\delta|^{m-i\bar{\rho}+2}\,\overline{(\beta z_2+\delta)}^{-m}. \quad (7)$$

Для частного значения $g = z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 1 \end{bmatrix}$ элемента g имеем

$$K(z_1+z_0, z_2+z_0) = K(z_1, z_2),$$

а при $z_0 = -z_2$

$$K(z_1, z_2) = K(z_1-z_2, 0) \equiv K_1(z_1-z_2). \quad (8)$$

С помощью равенств (8) и (7) получаем

$$K_1\left(\frac{z_1-z_2}{(\beta z_1+\delta)(\beta z_2+\delta)}\right) = K_1(z_1-z_2)\,|\beta z_1+\delta|^{m+i\rho+2}\times$$
$$\times(\beta z_1+\delta)^{-m}\,|\beta z_2+\delta|^{m-i\bar{\rho}+2}\,\overline{(\beta z_2+\delta)}^{-m}. \quad (9)$$

Отсюда, положив $z_2 = 0$ и $\beta = \frac{1-\delta}{z_1}$, находим

$$K_1\left(\frac{z_1}{\delta}\right) = K_1(z_1)\,|\delta|^{m-i\bar{\rho}+2}\,\bar{\delta}^{-m}. \quad (10)$$

Полагая теперь в равенстве (9) $z_1 = 0$ и $\beta = \frac{1-\delta}{z_2}$, получаем

$$K_1\left(-\frac{z_2}{\delta}\right) = K_1(-z_1)\,|\delta|^{m+i\rho+2}\,\delta^m. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) в силу произвольности z_1 и z_2 означают, что

$$|\delta|^{-i\rho}\,\bar{\delta}^{-m} = |\delta|^{i\rho}\,\delta^{-m}. \quad (12)$$

Положив здесь $\delta = \exp(i\theta)$, θ вещественное, получим

$$\exp(im\theta) = \exp(-im\theta), \quad \text{т. е.} \quad m = 0. \quad (13)$$

Ввиду этого из равенства (12) имеем $\rho = -\bar{\rho}$, т. е. ρ — чисто мнимое число, $\rho = i\sigma$, σ вещественное. Положив в формуле (10) $\delta = z_1 = z$, мы получим

$$K_1(z) = C(z)^{-2+\sigma}$$

и

$$K(z_1, z_2) = C(z_1-z_2)^{-2+\sigma},$$

где $C = K_1(1)$ — произвольная константа.

Применение обычного анализа Фурье функций от одной комплексной переменной показывает, что скалярное произведение (5) с ядром (6) является положительно определенным только при $0 < \sigma < 2$ (см. [620], гл. III, § 12).

Из формул (13) и (4) вытекает следующее выражение для U_g^L:

$$U_g^L\varphi(z) = |\beta z+\delta|^{-2-\sigma}\,\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right). \quad (14)$$

Эта формула определяет унитарные представления группы SL (2, C), когда $0 < \sigma < 2$. Поучителен анализ того, какие представления получаются при $\sigma \geqslant 2$. В случае $\sigma = 2$ скалярное произведение (5) принимает вид

$$(\varphi, \psi) = \int\int \varphi(z_1)\, \overline{\psi}(z_2)\, dz_1\, dz_2. \tag{15}$$

В частности,

$$(\varphi, \varphi) = \left|\int \varphi(z)\, dz\right|^2 \geqslant 0$$

и

$$(\varphi, \varphi) = 0, \quad \text{если} \quad \int \varphi(z)\, dz = 0. \tag{16}$$

Представляется естественным рассматривать множество функций $\varphi(z)$ на многообразии $Z = C^1$, как множество элементов гильбертова пространства H', получаемых посредством отождествления функций с одним и тем же значением интеграла $\int \varphi(z)\, dz$. Скалярное произведение в H' индуцируется при помощи формы (15); фактически H' является одномерным. Действительно, если $\int \varphi_2(z)\, dz \neq 0$, то полагая

$$c = \frac{\int \varphi_1(z)\, dz}{\int \varphi_2(z)\, dz}, \qquad \varphi = \varphi_1 - c\varphi_2,$$

получим

$$\int \varphi(z)\, dz = 0 \Rightarrow \varphi_1 = c\varphi_2,$$

т. е. любые два элемента из $H'(z)$ линейно зависимы. Воспользовавшись формулой (14) и положив $\sigma = 2$, находим

$$\int U_g^L \varphi(z)\, dz = \int |\beta z + \delta|^{-4} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) dz.$$

Переходя к переменной $\tilde{z} = (\alpha z + \gamma)/(\beta z + \delta)$ и используя якобиан перехода $z \to \tilde{z}$ [равенства (3.20) и ниже], мы получаем

$$\int U_g^L \varphi(z)\, dz = \int \varphi(z)\, d\tilde{z} = \int \varphi(z)\, dz,$$

т. е.

$$U_g^L \varphi(z) = |\beta z + \delta|^{-4} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) = \varphi(z) \text{ для каждого } \varphi \in H'(z), \tag{17}$$

или

$$U_g^L = 1.$$

Следует заметить, что это единственное представление группы Лоренца, которое унитарно и конечномерно.

Если же положить $\sigma > 2$, мы получим гильбертово пространство с индефинитной метрикой, которая содержит конечное число

отрицательных квадратов. Это так называемые *пространства Понтрягина*. Начало теории представлений в пространствах Понтрягина было положено Гельфандом и Наймарком в [314]; свое систематическое развитие она получила в недавних работах Наймарка и сотрудников (см. превосходный обзор Наймарка и Исмагилова [625]).

Б. *Дополнительные серии для* SL (n, C)

Получение явного вида представлений дополнительных серий для SL (n, C) подобно выводу в случае SL $(2, C)$. Снова исходим из класса функций на SL (n, C), удовлетворяющих условию $\varphi(kg) = L_k\varphi(g)$, где представление $k \to L_k$ подгруппы K теперь уже не является унитарным. Записываем элемент $k \in K$ в виде

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & & & & & & & & & k_{1n} \\ & k_{22} & & & & & & & & & & k_{2n} \\ & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ & & & k_{n-2\tau,\, n-2\tau} & & & & & & & & \vdots \\ & & & & \lambda_1 & & & & & & & \vdots \\ & & & & & \mu_1 & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \lambda_2 & & & & & \vdots \\ & 0 & & & & & & \mu_2 & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & & & \lambda_\tau & k_{n-1,\, n} \\ & & & & & & & & & & & \mu_\tau \end{bmatrix} \in P, \qquad (18)$$

$$\tau = 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right],$$

и берем неунитарное одномерное представление $k \to L_k$ подгруппы K вида

$$L_k = \prod_{p=2}^{n-2\tau} |k_{pp}|^{m_p + i\rho_p} k_{pp}^{-m_p} \prod_{q=1}^{\tau} |\lambda_q|^{m'_q + i\sigma'_q + \sigma''_q} \lambda_q^{-m'_q} |\mu_q|^{m'_q + i\sigma'_q - \sigma''_q} \mu_q^{-m'_q}, \qquad (19)$$

$$\rho_p,\ \sigma'_q,\ \sigma''_q \text{ вещественны.}$$

Ясно, что если $\sigma''_q = 0$ для $q = 1, 2, \ldots, \tau$, то L_k становится унитарным представлением. Очевидно также, что число τ представляет «степень неунитарности» представления $k \to L_k$: при $\tau = 0$ мы получаем унитарное представление подгруппы P, при $\tau = \left[\frac{n}{2}\right]$ имеем «максимально» неунитарное представление.

Действие представления $g \to U_g^L$ для дополнительных серий задается стандартной формулой (3.3). Остается только найти вид инвариантного скалярного произведения (2); этот вывод аналогичен выводу, проделанному для SL (2, C), но довольно длинен (см. [315], гл. IV). Поэтому ограничимся тем, что приведем конечные результаты.

Теорема 2. *Представление $g \to U_g^L$ дополнительной невырожденной серии* SL (n, C), *индуцированное представлением $k \to L_k$ подгруппы P, заданным согласно* (19), *определяется формулой*

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\mu(\tilde{z})}{d\mu(z)}}\, L_{\tilde{k}}\, \varphi(\tilde{z}), \tag{20}$$

где $\tilde{k} \in P$ и $\tilde{z} \in Z$ выписаны в (3.7), *а производная Радона—Никодима — в* (3.10).

Инвариантное скалярное произведение для представления (20) *задается формулой*

$$(\varphi, \psi) = \int K(\dot{z})\, \varphi(z)\, \overline{\psi(\dot{z}z)}\, d\mu(\dot{z})\, d\mu(z), \tag{21}$$

где $\dot{z}$ — элемент из Z вида

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
\left.\begin{matrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \dots & \dots 1 \end{matrix}\right\} n-2\tau & & & & & 0 \\
\hline
\underbrace{\qquad\qquad}_{n-2\tau} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{matrix} & & & & 0 \\
\hline
0 & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{matrix} & & & 0 \\
\hline
 & & & \ddots & & \\
\hline
 & & & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ z_\tau & 1 \end{matrix} &
\end{array}\right] \tag{22}$$

и

$$K(\dot{z}) = \prod_{j=1}^{\tau} |z_j|^{2(\sigma_j''-1)},$$
$$0 < \sigma_j'' < 1, \quad d\mu(\dot{z}) = \prod_{p=1}^{\tau} dx_p\, dy_p. \tag{23}$$

Инвариантными числами, определяющими данное представление дополнительной невырожденной серии, являются целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2\tau}, m'_1, m'_2, \ldots, m'_\tau$ и вещественные числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-2\tau}, \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_\tau, \sigma''_1, \sigma''_2, \ldots, \sigma''_\tau, 0 < \sigma''_p < 1, p = 1, 2, \ldots, \tau$. Легко проверить, что при $n = 2$ формула (20) совпадает с (14), а инвариантное скалярное произведение (21) после замены переменных совпадает с (5).

B. *Дополнительные вырожденные серии группы* SL (n, C)

Дополнительные вырожденные серии представлений строятся аналогичным образом. Рассмотрим класс функций на SL (n, C), удовлетворяющих условию

$$\varphi(kg) = L_k \varphi(g), \quad k \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}, \tag{24}$$

где представление $k \to L_k$ подгруппы $P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ является неунитарным. Записываем его в виде [см. соотношение (4.5)]

$$L_k = \prod_{p=2}^{r-2\tau} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p} \prod_{q=1}^{\tau} |\lambda_q|^{m'_q + i\sigma'_q + \sigma''_q} \lambda_q^{-m'_q} |\mu_q|^{m'_q + i\sigma'_q - \sigma''_q} \mu_q^{-m'_q}, \tag{25}$$

где $p = \det k_{pp}$, $p = 2, 3, \ldots, r - 2\tau$, а λ_q, μ_q, $q = 1, 2, \ldots, \tau$ — комплексные числа, представляющие собой последние 2τ диагональных элементов матрицы $k \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ [см. (4.3)]. Число τ, как и выше, представляет «степень неунитарности» представления L_k.

Теорема 3. *Представление $g \to U_g^L$ дополнительной вырожденной серии группы* SL (n, C), *индуцированное представлением $k \to L_k$ подгруппы $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, заданным согласно* (25), *определяется формулой*

$$U_g^L \varphi(z) = \sqrt{\frac{d\tilde{\mu}(\tilde{z})}{d\tilde{\mu}(z)}}\, L_{\tilde{k}} \varphi(\tilde{z}), \tag{26}$$

где $\tilde{k} \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $\tilde{z} \in Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ — факторы в каноническом разложении (4.4) *элемента $\tilde{g} = zg$, т. е. $\tilde{g} = zg = \tilde{k}\tilde{z}$, а $d\tilde{\mu}(\tilde{z})/d\tilde{\mu}(z)$ дана в* (4.10).

Выражения для инвариантного скалярного произведения для представления (26) и для переменной $\dot{z}$ те же, что и для дополнительной невырожденной серии, но элемент z должен быть взят из $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.