§ 7. Упражнения

§ 1.1. Проанализируйте свойства неприводимости представлений U^{χ^L} групп SO (p, q) и SU (p, q), индуцированных с минимальных параболических подгрупп.

Указание: воспользуйтесь теоремой 1.4.

§ 1.2. Классифицируйте неприводимые унитарные представления конформной группы SO (4, 2).

Указание: воспользуйтесь результатами § 1 и распространите технику Диксмье [218].

§ 3.1. Покажите, что операторы Казимира группы SL (2, C) в пространстве неприводимого представления $[m, \rho]$ имеют собственные значения

$$C_2\psi = -\frac{1}{2}(m^2 - \rho^2 - 4)\psi,$$

$$C_2'\psi = m\rho\psi,$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2,$$

$$C_2' = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{N}$$

и

$$\boldsymbol{J} = (M_{32}, M_{13}, M_{21}), \quad \boldsymbol{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03}).$$

§ 3.2. Покажите, что два неприводимых представления $[m, \rho]$ и $[-m, -\rho]$ группы SL (2, C) эквивалентны.

§ 3.3. Покажите, что представление $U^*_{g^{-1}}$, сопряженно-контраградиентное к неприводимому представлению $U_g^{[m, \rho]}$ группы SL (2, C), неприводимо и определяется параметрами $[m, -\rho]$.

Примечание: поскольку представления $[m, \rho]$ и $[-m, -\rho]$ эквивалентны, сопряженно-контраградиентное представление $(U_g^{[m, \rho]})^*$ эквивалентно представлению $U^{[m, \rho]}$ тогда и только тогда, когда либо $m = 0$, либо $\rho = 0$.

§ 3.4. Пусть $U^{(j_0, j_1)}$ — неприводимое представление SL (2, C), и пусть $|j_0 j_1 : JM> \equiv e_{JM}$ — канонический базис, ассоциированный с набором C_2, C_2', J_2 и J_3 коммутирующих операторов SL (2, C) [1]). Покажите, что матричные элементы генераторов

---

[1]) Параметры j_0 и j_1, характеризующие неприводимые унитарные представления SL (2, C), связаны с m, ρ формулами

$$j_0 = \left|\frac{m}{2}\right|, \quad j_1 = -\mathrm{i}\,(\operatorname{sign} m)\,\frac{\rho}{2} \quad \text{при} \quad m \neq 0,$$

$$j_0 = 0, \quad j_1 = \pm\mathrm{i}\,\frac{\rho}{2} \quad \text{при} \quad m = 0.$$

$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, J_3, $N_\pm = N_1 \pm iN_2$ и N_3 имеют вид

$$J_3 e_{JM} = M e_{JM},$$

$$J_- e_{JM} = \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, e_{J,\,M-1},$$

$$J_+ e_{JM} = \sqrt{(J+M+1)(J-M)}\, e_{J,\,M+1},$$

$$M = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J-1,\ J.$$

$$N_3 e_{JM} = C_J \sqrt{J^2 - M^2}\, e_{J-1,\,M} - A_J M e_{JM} - C_{J+1}\sqrt{(J+1)^2 - M^2}\, e_{J+1,\,M},$$

$$N_+ e_{JM} = C_J \sqrt{(J-M)(J-M-1)}\, e_{J-1,\,M+1} - $$
$$- A_J \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, e_{J,\,M+1} +$$
$$+ C_{J+1}\sqrt{(J+M+1)(J+M+2)}\, e_{J+1,\,M+1},$$

$$N_- e_{JM} = -C_J \sqrt{(J+M)(J+M-1)}\, e_{J-1,\,M-1} -$$
$$- A_J \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, e_{J,\,M-1} -$$
$$- C_{J+1}\sqrt{(J-M+1)(J-M+2)}\, e_{J+1,\,M-1},$$

где

$$A_J = \frac{i j_0 j_1}{J(J+1)}, \quad C_J = \frac{i}{J}\sqrt{\frac{(J^2 - j_0^2)(J^2 - j_1^2)}{4J^2 - 1}},$$

$$M = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J-1,\ J, \quad J = j_0,\ j_0+1,\ \ldots,$$

$$e_{JM} \in H^J, \quad H = \bigoplus_{J=j_0}^{\infty} H^{(J)}.$$

Далее покажите, что а) при j_1 чисто мнимом, j_0 неотрицательном полуцелочисленном мы имеем основную серию, б) при j_1 вещественном, $0 \leqslant j_1 \leqslant 1$, $j_0 = 0$, — дополнительную серию, в) при $j_1^2 = (j_0 + n)^2$ (n — некоторое целое число) мы имеем конечномерные представления.

§ 5.1. Пусть $U^{(0,\,j_1)} \otimes U^{(0,\,j_1')}$ — тензорное произведение неприводимых представлений дополнительной серии SL (2, C). Найдите коэффициенты Клебша—Гордана.

Указание: воспользуйтесь техникой обобщенных проекционных операторов, развитой в гл. 15, § 4; см. также [14] относительно решения аналогичной задачи для представлений основной серии.