$= (1, 0, 0, 1)$. Именно эта гиперплоскость является единственной, на которой должна быть локализуема любая безмассовая частица (вспомним локализацию фотона на фотографической пластинке). Следовательно, в качестве группы ковариантности оператора координаты безмассовой частицы вместо $\mathscr{E}^3$ мы должны взять подгруппу $G_0 = T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$. Если представление $U^{0,J}$ группы Пуанкаре при сужении на $T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$ является представлением, которое индуцировано представлением L группы $\mathscr{E}^2$, то будет существовать система импримитивности $(E(S)_\nu U^{0,J}_{G_0})$, $S \subset T^3 \rtimes \mathscr{E}^2/\mathscr{E}^2 \sim R^3$, основанная на R^3, и, согласно формуле (4), мы будем иметь для фотона три оператора координат. Достаточно неожиданным является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $U^{0,J}$ — неприводимое представление группы Пуанкаре, соответствующее безмассовой частице спина J. Сужение $U^{0,J}_{T^3 \rtimes \mathscr{E}}$ унитарно эквивалентно представлению группы $T^3 \rtimes \mathscr{E}^2$, индуцированному приводимым представлением подгруппы $R^1 \rtimes \mathscr{E}^2$.*

Доказательство проводится с помощью индукционно-редукционной теоремы 18.2.1, как и в утверждении 1. Другое доказательство было дано Ангелопулосом, Байеном и Флато [19].

Утверждение 2 означает, что из чисто групповых соображений безмассовая частица имеет только два оператора координат и может быть локализуемой в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Этот математический результат совпадает с интуитивным представлением о фотоне, который ударяется о фотографическую пластинку и реагирует с ионом.

§ 2. Представления коммутационных соотношений Гейзенберга

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о представлениях (канонических) коммутационных соотношений Гейзенберга

$$[q_j, p_k] = i\delta_{jk} I, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Величина q_j в нерелятивистской квантовой механике имеет смысл оператора координаты, а p_k — оператора импульса частицы. Поэтому очень важно знать число неэквивалентных неприводимых представлений алгебры (1). Наиболее известным представлением является представление Шредингера

$$\begin{aligned} q_j &: u(x) \to x_j u(x), \\ p_k &: u(x) \to \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial x^k}, \end{aligned} \tag{2}$$

или в глобальной форме

$$\begin{aligned} &\exp(i\beta_j q_j) : u(x) \to \exp(i\beta_j x_j)\, u(x), \\ &\exp(i\alpha_k p_k) : u(x) \to u(x+\alpha), \end{aligned} \tag{3}$$

которое реализуется в гильбертовом пространстве $H = L^2(R^n)$. Покажем, что любое другое представление канонических коммутационных соотношений (1), интегрируемое до глобального представления соответствующей группы, эквивалентно представлению Шредингера. Чтобы показать это, сначала приведем соотношения Гейзенберга (1) к так называемой *форме Вейля*.

Это осуществляется путем применения формулы Бэйкера—Хаусдорфа

$$\exp A \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right) = \exp([A, B]) \exp B \exp A, \tag{4}$$

справедливой для операторов A и B, коммутатор которых равен c-числу. Так как мы предполагаем интегрируемость представления соотношений (1), эта формула выполняется на инвариантном плотном множестве аналитических векторов Нельсона—Гординга для глобального представления (3) (гл. 11, § 7).

Положив $A = i\alpha_k p_k$ и $B = i\beta_k q_k$, где α_k и β_k вещественные числа, получим

$$\exp(i\alpha p) \exp(i\beta q) = \exp(i\alpha\beta) \exp(i\beta q) \exp(i\alpha p), \tag{5}$$

где

$$\alpha\beta = \alpha_k\beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Формула Бэйкера—Хаусдорфа позволяет также найти закон композиции для группы, ассоциированной с алгеброй Ли (1). Связывая с генераторами p_k, q_k и I параметры группы α_k, β_k и γ_k соответственно, получаем

$$\begin{aligned} &\exp[i(\alpha p + \beta q + \gamma I)] \exp[i(\alpha' p + \beta' q + \gamma' I)] = \\ &= \exp\left[i\left\{(\alpha+\alpha')p + (\beta+\beta')q + \left(\frac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \gamma + \gamma'\right) I\right\}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Это дает следующий закон композиции для элементов группы:

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta, \exp(i\gamma))(\alpha', \beta', \exp(i\gamma')) = \\ &\quad = \left(\alpha+\alpha', \beta+\beta', \exp\left[i\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \gamma + \gamma'\right)\right]\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что определяемая при помощи (1) алгебра Ли L нильпотентна. Действительно,

$$L_{(1)} = [L, L] = \{I\}, \quad L_{(2)} = [L_{(1)}, L_{(1)}] = \{0\}.$$

Следовательно, глобальная группа (7) также нильпотентна. Это свойство на уровне группы легко проверяется, если воспользоваться определением нильпотентных групп, данным в гл. 3, § 5.

Заметим, что из соотношений Вейля (5) вытекают соотношения Гейзенберга (1). Действительно, взяв производные $\partial^2/\partial\alpha_k\partial\beta_j$ от обеих частей равенства (5), мы возвращаемся к соотношениям (1). Однако обратное утверждение неверно. Вывод соотношений Вейля (5) опирался на тот факт, что представление Шредингера (3) является интегрируемым. Если же представление алгебры Ли (1) не является интегрируемым, то с ним нельзя ассоциировать соответствующую формулу Вейля (5). Следовательно, соотношения Гейзенберга и Вейля фактически не эквивалентны.

Теперь, пользуясь теоремой об импримитивности, покажем, что всякое интегрируемое представление соотношений (1) унитарно эквивалентно представлению Шредингера (3). Положим

$$V_\alpha \equiv \exp(i\alpha p), \quad U_\beta \equiv \exp(i\beta q), \quad \langle\alpha, \beta\rangle \equiv \exp(i\alpha\beta). \tag{8}$$

При этом равенство (5) приобретает вид

$$V_\alpha U_\beta = \langle\alpha, \beta\rangle U_\beta V_\alpha. \tag{9}$$

Здесь $\langle\alpha, \beta\rangle$ играет роль характера $\beta(\alpha)$ абелевой группы $G = R^n$. Кроме того,

$$V_\alpha V_{\alpha'} = V_{\alpha+\alpha'}, \quad U_\beta U_{\beta'} = U_{\beta+\beta'},$$

т. е. отображения $\alpha \to V_\alpha$ и $\beta \to U_\beta$ задают представления абелевых групп, изоморфных R^n. Это наблюдение служит отправной точкой следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — сепарабельная локально компактная абелева группа, $\widehat{G}$ — ее дуальная группа характеров. Пусть $\alpha \to V_\alpha$ и $\beta \to U_\beta$ — унитарные представления групп G и $\widehat{G}$ соответственно в одном и том же гильбертовом пространстве H, удовлетворяющие условиям*

1) $$V_\alpha U_\beta = \langle\alpha, \beta\rangle U_\beta V_\alpha \text{ для всех } \alpha \in G,\ \beta \in \widehat{G}, \tag{10}$$

2) *множество $\{V_\alpha, \alpha \in G, V_\beta, \beta \in \widehat{G}\}$ неприводимо.*

Тогда существует унитарный изоморфизм S: $H \to L^2(G)$, такой, что

$$SV_\alpha S^{-1}\varphi(x) = \varphi(x+\alpha), \quad SU_\beta S^{-1}\varphi(x) = \langle x, \beta\rangle\varphi(x), \quad x \in G. \tag{11}$$

Доказательство. По теореме СНАГ имеем

$$(U_\beta\varphi, \psi) = \int_{\widehat{G}} \langle\alpha, \beta\rangle\, d(E(\alpha)\varphi, \psi). \tag{12}$$

Здесь символ $d(E(\alpha)\varphi, \psi)$ означает, что характер $\langle\alpha, \beta\rangle$ подлежит интегрированию как функция α по отношению к функции

множеств $G \supset A \to (E(A)\varphi, \psi)$. Заменим U_β в равенстве (12) на $V_{\alpha'} U_\beta V_{\alpha'}^{-1}$. Тогда, воспользовавшись тем фактом, что

$$V_{\alpha'} U_\beta V_{\alpha'}^{-1} = \langle \alpha', \beta \rangle U_\beta$$

[по предположению (10)], мы заключаем, что

$$\int_G \langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha', \beta \rangle \, d(E(\alpha)\varphi, \psi) = \int_G \langle \alpha + \alpha', \beta \rangle \, d(E(\alpha)\varphi, \psi) =$$

$$= \int_G \langle \alpha'', \beta \rangle \, d(E(\alpha'' - \alpha')\varphi, \psi) = \int_G \langle \alpha'', \beta \rangle \, d(V_{\alpha'} E(\alpha'') V_{\alpha'}^{-1}\varphi, \psi). \quad (13)$$

Характеры разделяют точки группы G. Значит, меры в (13) равны. Отсюда следует

$$E(A\alpha^{-1}) = V_\alpha E(A) V_\alpha^{-1} \quad (14)$$

для всех $A \subset G$ и $\alpha \in G$. Таким образом, $E(A)$ представляет собой систему импримитивности, основанную на G.

Второе предположение означает, что пара (V, E) неприводима. В свою очередь из теоремы об импримитивности следует, что существует унитарное отображение S, такое, что

$$\begin{gathered} SV_\alpha S^{-1} = V_\alpha^L \quad \text{для всех} \quad \alpha \in G, \\ SE(A)S^{-1} = E^L(A) \text{ для всех борелевых множеств } A \subset G, \end{gathered} \quad (15)$$

где V^L — представление, индуцированное стационарной подгруппой K, а $E^L(A)$ — каноническое множество проекций, основанное на G, т. е.

$$E^L(A)\varphi(\alpha) = \chi_A(\alpha)\varphi(\alpha). \quad (16)$$

Так как $K = \{e\}$ и L неприводимы, представление V^L является правым регулярным представлением, т. е.

$$(V_{\alpha_0}^L \varphi)(\alpha) = \varphi(\alpha\alpha_0) = \varphi(\alpha + \alpha_0). \quad (17)$$

Наконец, из (12) и (16) следует, что

$$(SU_\beta S^{-1}\varphi)(\alpha) = \int_G \langle \alpha', \beta \rangle \, d(SE(\alpha')S^{-1}\varphi)(\alpha) =$$

$$= \int_G \langle \alpha', \beta \rangle \, d(E^L(\alpha')\varphi)(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \varphi(\alpha).$$

Этим завершается доказательство теоремы 1.

Если в теореме 1 положить $G = R^n$, то закон композиции (10) будет такой же, как и закон композиции (9) для группы Вейля. Значит, формула (11) задает неприводимое унитарное представление группы Вейля. Очевидно, что генераторы для U_β имеют тот же

вид, что и q_j из (2), а генераторы для V_α имеют тот же вид, что и p_k. Таким образом, каждое неприводимое интегрируемое представление канонических коммутационных соотношений эквивалентно представлению Шредингера.

Набор $\{V, U\}$ из (10) мог быть, вообще говоря, приводимым. В этом случае, однако, можно показать, что несущее гильбертово пространство H может быть разложено в ортогональную прямую сумму $\bigoplus_s H_s$ подпространств, каждое из которых инвариантно и неприводимо относительно набора $\{V, U\}$. Следовательно, мы приходим к выводу, что любое интегрируемое представление канонических коммутационных соотношений (1) унитарно эквивалентно по крайней мере счетному множеству экземпляров представления Шредингера. Это фактически показывает эквивалентность формулировок Гейзенберга и Шредингера квантовой механики в случае интегрируемых представлений.

§ 3. Комментарии и дополнения

А. Построение релятивистского оператора координаты и доказательство эквивалентности формулировок Шредингера и Гейзенберга в квантовой механике, приведенные в этой главе, основывались фактически на теореме об импримитивности. Это еще раз демонстрирует важность и эффективность этой теоремы. Фактически изложение квантовой механики — нерелятивистской, а также и релятивистской — могло бы базироваться на этой теореме [1]).

В историческом плане, эквивалентность представлений Гейзенберга и Шредингера была доказана Ланчосом, Шредингером [735] и Паули [663].

Понятие релятивистского оператора координаты было впервые введено в фундаментальной работе Ньютона и Вигнера [633]. Вывод, основанный на теореме об импримитивности, дали Вайтман [850] и Макки [556].

Представленное в § 1, Б построение операторов координат было разработано Лунном [548]. Для безмассовых частиц операторы координат рассматривались Бертраном. Новая, физически удовлетворительная теория оператора координаты для безмассовых частиц была представлена в превосходной работе Ангелопулоса, Байена и Флато [19].

---

[1]) Попытке осуществить такую программу посвящена монография Меиского [886], где на основе концепции импримитивности и техники индуцирования строится, помимо релятивистской и нерелятивистской кваитовых теорий свободных и взаимодействующих частиц, также аналогичная кваитовая теория в пространстве де Ситтера. — *Прим. перев.*