вид, что и q_j из (2), а генераторы для V_α имеют тот же вид, что и p_k. Таким образом, каждое неприводимое интегрируемое представление канонических коммутационных соотношений эквивалентно представлению Шредингера.

Набор $\{V, U\}$ из (10) мог быть, вообще говоря, приводимым. В этом случае, однако, можно показать, что несущее гильбертово пространство H может быть разложено в ортогональную прямую сумму $\bigoplus_s H_s$ подпространств, каждое из которых инвариантно и неприводимо относительно набора $\{V, U\}$. Следовательно, мы приходим к выводу, что любое интегрируемое представление канонических коммутационных соотношений (1) унитарно эквивалентно по крайней мере счетному множеству экземпляров представления Шредингера. Это фактически показывает эквивалентность формулировок Гейзенберга и Шредингера квантовой механики в случае интегрируемых представлений.

§ 3. Комментарии и дополнения

А. Построение релятивистского оператора координаты и доказательство эквивалентности формулировок Шредингера и Гейзенберга в квантовой механике, приведенные в этой главе, основывались фактически на теореме об импримитивности. Это еще раз демонстрирует важность и эффективность этой теоремы. Фактически изложение квантовой механики — нерелятивистской, а также и релятивистской — могло бы базироваться на этой теореме [1]).

В историческом плане, эквивалентность представлений Гейзенберга и Шредингера была доказана Ланчосом, Шредингером [735] и Паули [663].

Понятие релятивистского оператора координаты было впервые введено в фундаментальной работе Ньютона и Вигнера [633]. Вывод, основанный на теореме об импримитивности, дали Вайтман [850] и Макки [556].

Представленное в § 1, Б построение операторов координат было разработано Лунном [548]. Для безмассовых частиц операторы координат рассматривались Бертраном. Новая, физически удовлетворительная теория оператора координаты для безмассовых частиц была представлена в превосходной работе Ангелопулоса, Байена и Флато [19].

---

[1]) Попытке осуществить такую программу посвящена монография Меиского [886], где на основе концепции импримитивности и техники индуцирования строится, помимо релятивистской и нерелятивистской кваитовых теорий свободных и взаимодействующих частиц, также аналогичная кваитовая теория в пространстве де Ситтера. — *Прим. перев.*

Задачу о представлениях канонических коммутационных соотношений подробно исследовали Стоун [786] и фон Нейман [630]. Доказательство эквивалентности любого неприводимого представления представлению Шредингера, основанное на теореме об импримитивности, принадлежит Макки. Здесь мы по существу следовали выводу Макки.

Группа Вейля, по-видимому, не имеет непосредственного значения, как, например, группа Галилея или Пуанкаре. Поэтому неинтегрируемые или частично интегрируемые представления канонических коммутационных соотношений (2.1) также могли бы представлять определенный интерес. Пример такого представления (которое не эквивалентно представлению Шредингера) был построен Добнером и Мелсгеймером [227]. Физический смысл этого представления, однако, пока неясен. Было бы весьма интересно построить явно пример частично интегрируемого (относительно p_j) представления канонических коммутационных соотношений и выяснить его физический смысл.

Б. *Алгебраическое определение операторов координат*

Дадим теперь ради полноты изложения два других определения операторов координат, которые часто рассматриваются как более физические, чем определение, которое дано в § 1. Вообще говоря, эти определения не эквивалентны определению 1.1. Пусть нам задано неприводимое представление генераторов P_μ и $M_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре П для массивной частицы, и мы хотим определить операторы координат $\mathbf{Q}_j$ в обертывающем поле алгебры Ли группы П.

1. Из физических предположений трансляционной и вращательной инвариантности мы, как и в (1.8)—(1.9), имеем

$$\begin{aligned} [Q^j, P^k] &= \mathrm{i}\delta^{jk}, \\ [Q^j, J^k] &= \mathrm{i}\varepsilon^{jkl}Q_l. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее, трансляции во времени и чисто лоренцевы преобразования (бусты) дают условия

$$\begin{aligned} [Q^j, P^0] &= \mathrm{i}P^jP_0^{-1}, \\ [Q^j, M^{0k}] &= -\mathrm{i}\delta^{jk}Q_0 + \mathrm{i}Q^jP^kP_0^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где предполагается, что $Q_0 = t$ — число в несущем пространстве. Заметим, что ввиду спектрального условия P_0^{-1} хорошо определен.

Операторы Q_μ, удовлетворяющие этим требованиям, имеют следующий вид:

$$Q_\mu = tP_\mu P_0^{-1} + \frac{1}{m^2} M_{\mu\nu}P^\nu + \frac{1}{m^2} M^{\nu 0}P_\mu P_\nu P_0^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, у нас $Q_0 = t$ и в системе покоя $(P_0, 0)$

$$\overset{\circ}{Q}_i = \frac{1}{m} M_{i0}, \tag{4}$$

что является корректным соотношением. Заметим, что Q_μ в (3) не является 4-вектором.

Однако вопреки использованному в § 1 условию мы имеем

$$[Q^j, Q^k] = \frac{1}{m^2} \mathrm{i}\varepsilon^{jkl} S_l, \tag{5}$$

где S_l — оператор спина. Для бесспиновых частиц операторы координат коммутируют, а частицы со спином не могут быть локализованы точнее, чем их комптоновская длина волны. Заметим, что для спина $J = 0$ оператор координаты (3) в импульсном пространстве равен

$$Q_j = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial p^j} - \mathrm{i} \frac{p_j}{p_0^2}, \tag{6}$$

тогда как эрмитов оператор координаты Ньютона—Вигнера имеет вид

$$Q_j^{(NW)} = \mathrm{i}\partial/\partial p^j - \frac{1}{2} \mathrm{i} p_j/p_0^2. \tag{7}$$

2. Часто вводится другой оператор координаты, а именно 4-вектор X_μ, при помощи коммутационных соотношений

$$[X^\mu, P^\nu] = -\mathrm{i} g^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Через X^μ и P^μ мы можем записать

$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{9}$$

где $S_{\mu\nu}$ — спиновая часть в $M_{\mu\nu}$: $S_{\mu\nu} P^\nu = 0$. Ясно, что X_0 играет иную роль, чем Q_0 в (3).

Если ввести $D = Q_\mu P^\mu$, то из (9) легко получается

$$X_\mu = [\{D, P_\mu\} + \{M_{\mu\nu}, P^\nu\}]/2P^2. \tag{10}$$

В 11-параметрической алгебре Ли P^μ, $M^{\mu\nu}$, D эти операторы в дополнение к (8) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, X^\lambda] &= -\mathrm{i}(g^{\nu\lambda} X^\mu - g^{\mu\lambda} X^\nu), \\ [X^\mu, D] &= -\mathrm{i} X^\mu, \\ [X^\mu, X^\nu] &= -\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} P_\lambda W_\sigma / P^4, \end{aligned} \tag{11}$$

где $W_\mu = {}^1/_2 \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$. Этот оператор координаты формально ковариантен, но не удовлетворяет физическим требованиям (2).