§ 4. Упражнения

§ 1.1. Покажите, что заданная, согласно (17.1.10), система импримитивности $U_{\mathscr{G}_3}$, $E(\cdot)$ не является подходящей для построения операторов координат Q_i, $i = 1, 2, 3$.

§ 1.2. Покажите, что оператор координаты Q_k, $k = 1, 2, 3$, в пространстве H решений уравнения Дирака $(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(p) = 0$ с положительной энергией имеет вид

$$Q_k = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p_k} + \mathrm{i}\frac{\gamma_k}{2p_0} - \frac{\mathrm{i}(\gamma p)p_k + (\Sigma\times\boldsymbol{p})_k p_0}{2p_0^2(p_0+m)} - \frac{\mathrm{i}p_k}{p_0^2}. \tag{1}$$

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1.

§ 1.3. Постройте операторы координат для безмассовой частицы с произвольным спином J.

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1 для представления $U^{0,J}$ группы Пуанкаре и найдите базу $X = \Pi/K$ спектральной меры $E(S)$, $S \subset X$. Отсюда выведите, что физические величины для безмассовой частицы могут быть локализованы.

§ 1.4. Постройте операторы координат для тахионов $m^2 < 0$ произвольного спина.

Указание: воспользуйтесь тем же методом, что и в предыдущем упражнении.

§ 1.5. Покажите, что для оператора координаты (1) дираковской частицы

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}[H, Q_k] = \frac{p_k}{p_0}\,\frac{\gamma_0 m + \gamma_0\gamma p}{p_0}, \tag{2}$$

что в H равно p_k/p_0, тогда как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p^k}\right) = \mathrm{i}\left[H, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p^k}\right] = \gamma_0\gamma_k, \tag{3}$$

что равно скорости света, поскольку $(\gamma_0\gamma_k)^2 = I$.

§ 1.6. Покажите, что всякая галилеевски инвариантная система с массой $m > 0$ локализуема.

§ 1.7. Покажите, что элементарная галилеевская система с $m = 0$, описываемая неприводимым представлением группы Галилея, не является локализуемой.

§ 1.8. Постройте оператор координаты для массивной частицы с произвольным спином.

Указание: воспользуйтесь индукционно-редукционной теоремой 18.1.1.

§ 1.9. Дополните заданные, согласно (1.21), операторы координат Q_k, $k = 1, 2, 3$, до ковариантного оператора координаты $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, $Q_0 = t$. Покажите, что этот оператор, ассо-

циированный с гиперплоскостью H, которую определяет нормальный вектор $n = (1, 0, 0, 0)$, преобразуется ковариантно следующим образом:

$$Q_\mu(H) \xrightarrow[(a,\Lambda)]{} Q'_\mu(H') = \Lambda^\nu_\mu Q_\nu(H) + a_\mu,$$

где

$$H = (n, \tau), \quad Q_\mu n^\mu = \tau$$

и

$$H' = (n', \tau'), \quad n'_\mu = \Lambda^\nu_\mu n_\nu, \quad \tau' = \tau + n'_\mu a^\mu.$$

§ 1.10. Покажите, что оператор $Q'_\mu(H')$ определяется системой импримитивности $(E'(\cdot), U'^{m,J})$, где

$$U'^{m,J}_{(a,\Lambda)}\psi(p) = e^{ipa}D^J(r')\psi(\Lambda^{-1}p),$$

$r' = \Lambda_\omega^{-1} r \Lambda_\omega$, Λ_ω^{-1} — преобразование Лоренца, которое переводит H в H', а $E'(\cdot)$ — спектральная мера, ассоциированная с U', как в утверждении 1, и основанная на $SO(3)' \diagdown T^3 \rtimes SO(3)' \sim H'$. Здесь $SO(3)' = \Lambda_\omega^{-1} SO(3)\Lambda_\omega$.

§ 1.11. Покажите, что классический вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ и плотность энергии $U = {}^1/_2(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)$ являются инвариантами группы $E(2)$.

Указание: введите комплексный вектор $\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ и покажите, что при $A \in \mathscr{E}^2$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \bar{\alpha} z \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, $|\alpha| = 1$, $z \in C$ имеет место $\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H} \xrightarrow{A} \alpha^2(\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H})$.

§ 2.1. Постройте простейшие неразложимые представления канонических коммутационных соотношений (2.1).

Указание: воспользуйтесь неразложимыми представлениями гл. 6, § 3, Г для абелевой подгруппы группы Вейля и индуцируйте их до всей группы.

§ 2.2. Найдите все неинтегрируемые представления канонических коммутационных соотношений (2.1). Могут ли они иметь физический смысл?

§ 2.3. Найдите все частично интегрируемые представления (относительно импульсов P_j) канонических коммутационных соотношений (2.1). Дайте физическую интерпретацию этих представлений.