§ 2. Конечнокомпонентные релятивистские волновые уравнения [1])

Получим теперь все общепринятые релятивистские волновые уравнения для массивной частицы со спином j, подставляя в общее волновое уравнение (1.17) частный вид представления $D(\Lambda)$ и проектора π.

А. *Уравнение Дирака*

Мы хотим получить волновое уравнение для частицы с положительной массой m и спином $^1/_2$. Волновые функции $\psi(p)$ из пространства $H^{m,\,1/2}$ неприводимых представлений $U^{m,\,1/2}$ в силу (17.2.41) преобразуются в спинорном базисе следующим образом:

$$U^{m,\,1/2}_{(a,\,\Lambda)}\psi(p) = \exp[ipa]\,D^{(1/2,\,0)}(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p). \tag{1}$$

Однако оператор четности P не может быть определен в $H^{m,\,1/2}$, так как $PD^{(1/2,\,0)}P^{-1} = D^{(0,\,1/2)}$. Минимальным расширением H^m пространства $H^{m,\,1/2}$, в котором определен оператор четности, является пространство волновых функций, преобразующихся согласно представлению $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$, т. е.

$$U^{m}_{(a,\,\Lambda)}\psi(p) = \exp[ipa]\,(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})(\Lambda)\,\psi(L_\Lambda^{-1}p). \tag{2}$$

Но теперь мы имеем четыре компоненты волновой функции вместо двух, необходимых для описания частицы с двумя проекциями спина. Проектирующий оператор π, который удаляет нежелательные компоненты, в данном случае имеет вид

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I), \quad \text{где} \quad \gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Используя формулы (8.9.14), (8.9.15) для представления $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$ и матрицы γ_μ, легко проверить, что

$$(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})^{-1}(\Lambda)\,\gamma_\mu\,(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})(\Lambda) = (L_\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}\,\gamma_\nu. \tag{4}$$

---

[1]) В соответствии с принятыми в физической литературе обозначениями в этом параграфе мы используем скалярное произведение, антилинейное по первому сомножителю и линейное по второму.

Отсюда в силу равенства (1.18) мы получаем

$$(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})^{-1}(\Lambda_p)\,\pi\,(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)})(\Lambda_p) = \\ = \frac{1}{2m}(\gamma_\mu p^\mu + m), \tag{5}$$

где $p = L_\Lambda \overset{\circ}{p}$, $\overset{\circ}{p} = (m,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Следовательно, из общего волнового уравнения (1.17) получаем уравнение

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi(p) = 0, \tag{6}$$

которое является уравнением Дирака. Этот пример ясно показывает, что дополнительное условие для спиновой неприводимости представляет собой волновое уравнение.

Используя явный вид представления $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$, который дан в (8.9.14), и формулу (17.3.9), заключаем, что в случае представления $D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}$ оператор четности η должен удовлетворять следующим условиям:

$$\eta\gamma_k\eta = -\gamma_k \quad \text{и} \quad \eta\gamma_0\eta = \gamma_0. \tag{7}$$

Эти условия выполняются при $\eta = \gamma_0$. Значит, скалярное произведение (1.26) принимает вид

$$(\psi_1,\ \psi_2) = \int \frac{d^3p}{p_0}\,(\psi_1(p),\ \gamma_0\psi_2(p))_H = \int \bar{\psi}_{1\alpha}(p)\,\psi_\alpha(p)\,\frac{d^3p}{p_0}, \tag{8}$$

где

$$\bar{\psi}(p) = \psi^*(p)\,\gamma_0.$$

Б. *Уравнения Прока*

Получим теперь волновое уравнение для частицы с положительной массой и спином 1. Из соображений релятивистской ковариантности такую частицу можно было бы описывать при помощи трехкомпонентной волновой функции $\tilde{\Phi}(p) = \{\tilde{\Phi}_k(p)\}_{k=1}^3$ (где каждая компонента соответствует проекции спина), преобразующейся согласно (17.2.41)

$$U^{m,\,1}_{(a,\,\Lambda)}\tilde{\Phi}(p) = \exp(ipa)\,D^{(1,\,0)}(\Lambda)\,\tilde{\Phi}(L_\Lambda^{-1}p). \tag{9}$$

Однако представление $D^{(1,\,0)}$ не допускает оператора четности P в пространстве $H^{m,\,1}$. Значит, мы должны либо удвоить пространство и рассматривать представление $D^{(1,\,0)} \oplus D^{(0,\,1)}$, либо исходить из 4-векторной функции $\Phi(p) = \{\Phi_\mu(p)\}_{\mu=0}^3$, которая преобразуется по представлению $D^{(1/2,\,1/2)}$. Так как $D^{(1/2,\,1/2)}|_{SU(2)} \simeq D^1 + D^0$, в последнем случае в дополнение к частице спина 1 мы имеем другую скалярную частицу. Поскольку представление

$D^{(1/2,\,1/2)}$ дает волновую функцию с меньшим числом компонент, чем $D^{(1,\,0)} \oplus D^{(0,\,1)}$, будем пользоваться им для описания частиц спина 1. Проектор π на 3-векторное пространство можно записать в виде

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[\delta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}]. \tag{10}$$

Представление $D^{(1/2,\,1/2)}$ — это регулярное четырехмерное представление L группы Лоренца, заданное при помощи (17.2.2). Таким образом, в силу равенства (10) получаем

$$\pi(p) = \left(D^{(1/2,\,1/2)}\right)^{-1}(\Lambda)\,\pi D^{(1/2,\,1/2)}(\Lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu}\right].$$

Отсюда с учетом (1.17) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_\nu p_\mu}{m^2} - g_{\mu\nu}\right)\Phi^\mu(p) = \Phi_\nu(p).$$

Умножая обе части на p^ν, имеем

$$p^\nu \Phi_\nu(p) = 0, \tag{11}$$

что является уравнением Прока. Понятно, что поскольку $p^2 = m^2$, каждая компонента $\Phi_\mu(p)$ удовлетворяет также уравнению Клейна—Гордона

$$(p^2 - m^2)\,\Phi_\mu(p) = 0. \tag{12}$$

Так как $D^{(1/2,\,1/2)}(\Lambda) = L_\Lambda$, то оператор четности η для $D^{(1/2,\,1/2)}(\Lambda)$, удовлетворяющий равенству (17.3.9), задается ввиду (17.2.5) посредством метрического тензора $g = \|g_{\mu\nu}\|$. Поэтому в силу (1.26) скалярное произведение имеет вид

$$(\Phi,\ \Phi) = \int \Phi^*(p)\, g\Phi(p)\,\frac{d^3p}{p_0} = \int \Phi^*_\mu(p)\,\Phi^\mu(p)\,\frac{d^3p}{p_0}. \tag{13}$$

Уравнения Прока (11) и (12) в координатном пространстве имеют вид

$$\partial^\mu \Phi_\mu(x) = 0 \quad \text{и} \quad (\Box - m^2)\,\Phi_\mu(x) = 0. \tag{14}$$

Эти уравнения можно записать в виде набора уравнений первого порядка. Действительно, полагая

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu, \tag{15}$$

получаем

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} - m^2 \Phi_\nu = 0. \tag{16}$$

Дифференцированием легко проверить, что первоначальные уравнения Прока (11) и (12) эквивалентны уравнениям (15) и (16).

В. *Уравнения для массивных тензорных полей*

Рассмотрим массивное поле спина 2. Для описания этого поля мы можем использовать либо представление $D^{(1,1)}$, либо $D^{(2,0)} \oplus \oplus D^{(0,2)}$. Мы знаем, что представление $D^{(1,1)}$ можно реализовать в пространстве бесследовых симметрических тензоров $\Phi_{\mu_1\mu_2}$ ранга два. Так как $D^{(1,1)}|_{SU(2)} \simeq D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$, мы должны обрезать нежелательные компоненты спина 1 и спина 0. Следуя векторному случаю, мы приводим проектор π к виду

$$\pi = \bigotimes_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \| \overset{r}{\delta} - \overset{r}{g} \|. \tag{17}$$

Поскольку тензор $\Phi_{\mu_1\mu_2}$ преобразуется согласно представлению $L \otimes L$, проектор $\pi(p)$ ввиду (1.18) имеет вид

$$\pi(p) = \bigotimes_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \left\| g^{\mu_r}_{\nu_r} - \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} \right\|. \tag{18}$$

Волновая функция $\Phi_{\mu_1\mu_2}(p)$ в импульсном пространстве в силу (1.17) удовлетворяет условию

$$\pi(p)\Phi = \Phi. \tag{19}$$

Умножая обе части на p^μ, получаем

$$p^\mu \Phi_{\mu,\mu_2}(p) = 0. \tag{20}$$

Решая это уравнение относительно $\Phi_{0,\mu}$, получим

$$\Phi_{0,\mu}(p) = \frac{p_k \Phi_{k\mu}}{p_0}. \tag{21}$$

Таким образом, волновые уравнения (20) позволяют нам выразить компоненту $\Phi_{0,0}(p)$ (частица спина 0) и компоненты $\Phi_{0,k}(p)$ (частица спина 1) через пять независимых компонент $\Phi_{k,l}(p)$, соответствующих частице спина 2. Ясно, что ввиду массового условия мы также имеем

$$(p^2 - m^2)\Phi_{\mu_1,\mu_2}(p) = 0. \tag{22}$$

Проделанную в этом примере процедуру можно непосредственно применить к представлениям $D^{(j,j)}$ симметрических бесследовых тензоров $\Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_{2j}}$. Получаемые в итоге волновые уравнения имеют вид

$$p^\mu \Phi_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2j}}(p) = 0, \quad (p^2 - m^2)\Phi_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2j}} = 0. \tag{23}$$

Г. *Уравнения Рариты—Швингера*

Примеры дираковской и тензорной частиц наводят на мысль использовать для описания массивных частиц с произвольным

полуцелым спином тензорное произведение представления Дирака и тензорного представления группы SL (2, C), т. е.

$$D = (D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}) \otimes D^{(j,\,j)}. \tag{24}$$

В этом случае волновая функция $\psi(p)$ несет как спинорный индекс, так и индексы симметрического бесследового тензора: $\psi_{\alpha;\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{2j}}(p)$. Проектор π на высший спин $2j + 1/2$ представления (24) является тензорным произведением дираковского (3) и соответствующего симметрическому тензору (18) проекторов, т. е.

$$\pi = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I)^2 \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2}(\overset{r}{I} - \overset{r}{g}). \tag{25}$$

Поэтому с учетом равенства (1.18) мы получаем

$$\pi(p) = \frac{1}{2m}(\gamma p + m) \bigotimes_{r=1}^{2j} \left\| g^{\mu_r}_{\nu_r} - \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} \right\|. \tag{26}$$

Умножение обеих частей (26) на $(\gamma p - m)$ и p^μ соответственно дает

$$(\gamma p - m)\,\psi_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{2j}}(p) = 0, \tag{27}$$

$$p^\mu \psi_{\mu,\,\mu_2,\,\ldots,\,\mu_{2j}}(p) = 0. \tag{28}$$

Имеем также

$$(p^2 - m^2)\,\psi_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{2j}}(p) = 0. \tag{29}$$

Уравнения (27)—(29) называются *уравнениями Рариты—Швингера*. Предоставляем в качестве упражнения читателю проверить, что спин-тензорная волновая функция $\psi_{\alpha;\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{2j}}(p)$, удовлетворяющая (27)—(29), имеет $4j + 1$ независимых компонент.

Д. *Уравнения Баргманна—Вигнера*

Выведем теперь волновое уравнение для массивной частицы с произвольным целочисленным спином j. Ясно, что частицу со спином j можно построить с помощью тензорного произведения дираковских частиц; соответствующее представление $D(\Lambda)$ группы SL (2, C) имеет вид

$$D = \bigotimes_{r=1}^{j} (\overset{r}{D}{}^{(1/2,\,0)} \oplus \overset{r}{D}{}^{(0,\,1/2)}). \tag{30}$$

Ввиду соотношения (3) проектор на высший спин имеет вид

$$\pi = \bigotimes_{r=1}^{j} \frac{1}{2}(\overset{r}{\gamma}_0 + \overset{r}{I}). \tag{31}$$

С учетом равенств (1.18) и (5) проектор $\pi(p)$ приобретает вид

$$\pi(p) = \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2m} (\overset{r}{\gamma} p + m). \tag{32}$$

Умножая равенство (1.17)

$$\pi(p)\psi(p) = \psi(p) \tag{33}$$

на $\overset{i}{\gamma} p - m$, $i = 1, 2, \ldots, j$, и используя массовое условие $p^2 = m^2$, мы приходим к серии спинорных уравнений

$$(\overset{i}{\gamma} p - m)_{\alpha_i \beta_i} \psi_{\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_{2j}}(p) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2j. \tag{34}$$

Эти уравнения являются волновыми уравнениями Баргманна—Вигнера. Они представляют собой прямое обобщение уравнения Дирака на частицы с произвольным целочисленным спином.

E. 2 $(2j + 1)$-*компонентные волновые уравнения*

Для описания массивной частицы с произвольным спином можно также использовать представление $D = D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)}$, которое является другим непосредственным обобщением представления Дирака. Возьмем проектор π в виде

$$\pi = \frac{1}{2}(\eta + I), \tag{35}$$

где аналогично дираковскому случаю оператор η является оператором четности для представления D, $\eta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $\eta D^{(j,0)} \eta = D^{(0,j)}$. С помощью соотношений (1.17), (1.18) и (22) мы получаем следующее волновое уравнение:

$$\psi(p) = \pi(p)\psi(p) = \frac{1}{2} D^{-1}(\Lambda)(\eta + I) D(\Lambda)\psi(p) =$$

$$= \frac{1}{2}(\eta D^*(\Lambda) D(\Lambda) + I)\psi(p) = \frac{1}{2}\left[\eta D\left(\frac{\sigma p}{m}\right) + I\right]\psi(p) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & D^{(j,0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) \\ D^{(0,j)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) & I \end{bmatrix}\psi(p). \tag{36}$$

Спинор $\psi(p)$ имеет вид

$$\psi(p) = \begin{bmatrix} \psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_j}(p) \\ \psi_{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_j}(p) \end{bmatrix},$$

где первая строка преобразуется по представлению $D^{(j,0)}$, а вторая — по представлению $D^{(0,j)}$. Мы условились компоненты

спинора, преобразующегося по представлению $D^{(0,\,j)}$, обозначать индексами с точкой сверху. Пользуясь равенствами

$$D^{(j,\,0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)=\left(\frac{\sigma p}{m}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\sigma p}{m}\right)\quad (2j \text{ раз}) \tag{37}$$

и

$$D^{(0,\,j)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)=\left(\frac{\tilde{\sigma} p}{m}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\tilde{\sigma} p}{m}\right)\quad (2j \text{ раз}), \tag{38}$$

мы можем записать формулу (36) в спинорной форме:

$$\begin{gathered}(\sigma\cdot p)_{\alpha_1\beta_1}(\sigma\cdot p)_{\alpha_2\beta_2}\cdots(\sigma\cdot p)_{\alpha_j\dot{\beta}_j}\psi^{\dot{\beta}_1\cdots\dot{\beta}_j}=m^{2j}\psi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_j},\\ (\tilde{\sigma}\cdot p)^{\beta_1\alpha_1}(\tilde{\sigma}\cdot p)^{\beta_2\alpha_2}\cdots(\tilde{\sigma} p)^{\beta_j\alpha_j}\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_j}=m^{2j}\psi^{\dot{\beta}_1\cdots\dot{\beta}_j}.\end{gathered} \tag{39}$$

Операторы проектирования этого типа были рассмотрены в работах Йооса [436], Барута, Музинича и Вильямса [88] и Вайнберга [832].

Ж. *Волновые уравнения для безмассовых частиц*

Если для безмассовой частицы мы используем волновые функции, преобразующиеся ковариантно относительно представлений $D(\Lambda)$ группы Лоренца согласно формуле (1.15), то мы должны спроектировать ее на неприводимые представления подгруппы $\tilde{E}_2$ группы SL (2, C), которая является малой группой для безмассовых частиц. Эта малая группа, отличная от группы для массивных частиц, некомпактна и неполупроста; она имеет важные следствия для физики безмассовых частиц. Конечномерные представления SL (2, C) при редукции на подгруппу $\tilde{E}_2$ являются неразложимыми и, следовательно, неунитарными представлениями последней, за исключением случая, когда они одномерны. $\tilde{E}^2$ имеет структуру $\tilde{E}^2\simeq T^2\rtimes U(1)$, и сужение представления D группы SL (2, C) на $\tilde{E}(2)$ имеет вид $D(T^2)\exp(ij\Phi)$, где $D(T^2)$ в общем случае неразложимо. В гл. 17, § 2, В рассмотрены орбиты представлений $\tilde{E}_2$. Таким образом, для волнового уравнения с положительным скалярным произведением мы должны убедиться, что представления $D(T^2)$ подгруппы T^2 тривиальны, т. е.

$$D(T^2)\,\psi(\overset{\circ}{p})=\psi(\overset{\circ}{p}),\qquad \overset{\circ}{p}=(1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Пусть J_k и N_k, $k=1,\ 2,\ 3$, — генераторы группы SL (2, C); тогда J_1-N_2 и J_2+N_1 являются коммутирующими генераторами подгруппы T_2. Но тогда для тривиального представления T_2 волновая функция должна удовлетворять условиям

$$(J_1-N_2)\,\psi(\overset{\circ}{p})=0\quad\text{и}\quad(J_2+N_1)\,\psi(\overset{\circ}{p})=0. \tag{40}$$

Возьмем представление $D^{(j_1, j_2)}(\Lambda)$ группы SL (2, C) в SU (2) $\times$ $\times$ SU (2)-базисе с $\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{J} + \mathrm{i}\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J} - \mathrm{i}\boldsymbol{N}$. Элементарные вычисления показывают, что, согласно уравнениям (40), $\psi(\overset{\circ}{p})$ является вектором старшего веса для $\boldsymbol{J}_1$ и вектором младшего веса для $\boldsymbol{J}_2$, т. е.

$$J_1^{(+)}\psi(\overset{\circ}{p}) = 0, \quad J_2^{(-)}\psi(\overset{\circ}{p}) = 0, \tag{41}$$

где

$$J_k^{(\pm)} = (J_k)_1 \pm \mathrm{i}(J_k)_2, \quad k = 1, 2,$$

или

$$(J_1)_3\psi(\overset{\circ}{p}) = j_1\psi(\overset{\circ}{p}) \quad \text{и} \quad (J_2)_3\psi(\overset{\circ}{p}) = -j_2\psi(\overset{\circ}{p}). \tag{42}$$

В произвольной лоренцевой системе отсчета эти уравнения принимают вид

$$(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p})\psi(p) = p_0(j_1 - j_2)\psi(p), \tag{43а}$$

или, что эквивалентно,

$$(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{p})\psi(p) = \mathrm{i}p_0(j_1 + j_2)\psi(p). \tag{43б}$$

Волновые уравнения (43) можно также переписать в виде

$$W_0\psi(p) = p_0(j_1 - j_2)\psi(p), \tag{44}$$

где $W_\mu = \varepsilon_{\mu\lambda\sigma\nu}M^{\lambda\sigma}p^\nu$ — оператор спина. Таким образом, равенство (44) показывает, что $\psi(p)$ имеет лишь одну компоненту, а именно со спиральностью $\lambda = j_1 - j_2$, как это известно вообще из теории представлений. Инвариантность относительно четности снова делает необходимым удваивать пространство, так что безмассовые частицы, когда четность определена, имеют два состояния поляризации. Скалярное произведение (1.23) сводится в этом случае к

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{p_0}\psi_1^*(p)\,p_0^{-2(j_1+j_2)}\psi_2(p), \quad p_0 = |p|. \tag{45}$$

Пример 1. $D(\Lambda) = D^{(1/2, 0)}(\Lambda)$. Тогда $\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, и любое из уравнений (43) дает

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\psi(p) = p_0\psi(p), \tag{46}$$

что является уравнением Вейля для нейтрино.

Пример 2. Возьмем $D(\Lambda) = (D^{(1, 0)} \oplus D^{(0, 1)})(\Lambda)$. Тогда $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$, $\boldsymbol{J}^{(1, 0)} = \boldsymbol{J}^{(0, 1)}$ с $(J_a^{(1, 0)})_{bc} = \mathrm{i}\varepsilon_{abc}$; следовательно, $(\boldsymbol{J}^{(1, 0)}\boldsymbol{p})_{bc} = \mathrm{i}\varepsilon_{abc}p_a = (\boldsymbol{J}^{(0, 1)}\boldsymbol{p})_{bc}$, и из (43а) получаем

$$\boldsymbol{p}\times\psi_1(p) = -\mathrm{i}\omega\psi_1(p), \quad \boldsymbol{p}\times\psi_2(p) = \mathrm{i}\omega\psi_2(p).$$

Полагая $\psi_1 = \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{E}$ и $\psi_2 = \boldsymbol{B} - i\boldsymbol{E}$, мы в итоге получаем следующие уравнения в импульсном пространстве:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{B} = -\omega \boldsymbol{E}, \end{gathered} \tag{47}$$

которые являются уравнениями Максвелла.

3. *Общие замечания*

1. Примечательно, что все существующие конечномерные волновые уравнения являются частными случаями общего волнового уравнения (1.17)

$$\pi(p)\psi(p) = \psi(p),$$

полученного на основе теории индуцированных представлений. Отдельные волновые уравнения мы получили выбирая конкретные представления $D(\Lambda)$ группы SL (2, C) и вычисляя соответствующие проектирующие операторы $\pi(p)$. Эти результаты еще раз демонстрируют эффективность и изящество теории индуцированных представлений.

2. В общем случае волновое уравнение (1.17) представляет собой условие неприводимости для спина. Уравнение Клейна—Гордона

$$(p^2 - m^2)\psi(p) = 0, \tag{48}$$

которому удовлетворяют все волновые функции, представляет собой условие неприводимости для массы. В случае уравнения Дирака массовая неприводимость следует из спиновой неприводимости. Действительно, умножая уравнение Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(p) = 0$$

на оператор $(\gamma_\mu p^\mu + m)$, мы приходим к уравнению (48). Но в случае уравнения Прока неприводимость массы (48) нельзя вывести из условия неприводимости спина $p^\nu \Phi_\nu(p) = 0$. Можно однако записать волновое уравнение в виде, из которого следует неприводимость массы и спина: например, соответствующее уравнение для массивной частицы спина 1 имеет вид

$$(m^2 g_\nu^\mu + p_\nu p^\mu)\Phi_\mu(p) = p^2 \Phi_\nu(p);$$

обратно, уравнение Дирака можно записать в виде

$$(\gamma_\mu p^\mu - (p^2)^{1/2})\psi(p) = 0,$$

откуда неприводимость массы не вытекает. Эти два примера иллюстрируют тот факт, что условия неприводимости массы и спина имеют под собой одинаковые основания, и то, представим ли мы их одним или же двумя отдельными уравнениями, является лишь вопросом удобства.