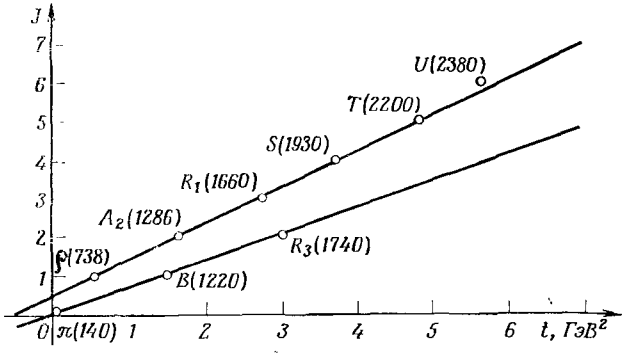
§ 3. Бесконечнокомпонентные волновые уравнения

А. *Уравнения Гельфанда—Яглома*

В § 1 было показано, что любое представление группы Лоренца, сужение которого на SU (2) является приводимым, может быть использовано для построения явно ковариантного волнового уравнения. В § 2 мы использовали конечномерные приводимые представления группы SL (2, C) для получения общепринятых



Фиг 1.

конечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений. Но эксперименты показывают, что элементарные частицы и резонансы могут быть сгруппированы в возможные бесконечные семейства частиц. На фиг. 1 показан пример зависимости между массой и спином для мультиплета мезонов (так называемые ρ - и π-траектории Редже).

Весьма привлекательной представляется поэтому идея рассмотреть бесконечнокомпонентные волновые уравнения, описывающие свойства целого семейства частиц. Простейшим уравнением такого типа является обобщение уравнения Дирака

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\psi(p) = 0, \tag{1}$$

где Γ_μ — векторный оператор в несущем пространстве, а $\varkappa$ — скаляр. Но возникает вопрос: существует ли и при каких условиях в любом бесконечномерном пространстве векторный оператор, который должен удовлетворять условию ковариантности

$$U_g^{-1}\Gamma_\mu U_g = \Lambda_\nu^\mu \Gamma_\nu. \tag{2}$$

Эту проблему исследовали Гельфанд и Яглом, которые доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть неприводимое представление группы* SL (2, *C*) *характеризуется парой чисел* $[j_0, j_1]$, *где* j_0 — *наименьший спин в представлении, принимающий целые или полуцелые значения, а* j_1 — *произвольное комплексное число* (*гл. 19*). *В прямой сумме* $H = \bigoplus_s H^{[j_0^s, j_1^s]}$ *неприводимых пространств существует 4-векторный оператор* Γ^μ, *если для всякой неприводимой компоненты* $H^{[j_0, j_1]}$ *в* H *существует неприводимая компонента* $H^{[j_0', j_1']}$ *в* H, *инвариантные числа которых связаны друг с другом соотношениями*

$$\begin{aligned}[j_0', j_1'] &= [j_0 + 1, j_1] \\ &= [j_0 - 1, j_1] \\ &= [j_0, j_1 + 1] \\ &= [j_0, j_1 - 1].\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. В силу равенства (2) получаем

$$[\Gamma_\mu, M_{\lambda\rho}] = \mathrm{i}\,(g_{\mu\lambda}\Gamma_\rho - g_{\mu\rho}\Gamma_\lambda), \tag{4}$$

где $M_{\lambda\rho}$ — генераторы SL (2, *C*). Полагая $\boldsymbol{J} = (M_{32}, M_{13}, M_{21})$ и $\boldsymbol{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$, получаем, в частности,

$$\mathrm{i}\Gamma_k = [\Gamma_0, N_k], \tag{5}$$

$$[\Gamma_0, J_k] = 0, \quad [\Gamma_3, N_3] = \mathrm{i}\Gamma_0 = -\mathrm{i}\,[[\Gamma_0, N_3], N_3]. \tag{6}$$

Ввиду равенства (5) достаточно найти Γ_0, чтобы получить $\{\Gamma_\mu\}_{\mu\neq 0}^3$. Поэтому достаточно проверить, когда существует определенный при помощи (6) оператор Γ_0. Пусть H — приводимое пространство представления $g \to U_g$ группы SL (2, *C*), и пусть $\sum_\tau \oplus H^\tau$ — его разложение на неприводимые подпространства H^τ, $\tau \equiv [j_0, j_1]$. Пусть $|\tau, JM\rangle$ — канонический базис в H^τ. Пусть $[c^{\tau\tau'}_{JM, J'M'}]$ — матричные элементы оператора Γ_0 в этом базисе в пространстве представления H. Тогда в силу соотношений (6) имеем

$$c^{\tau\tau'}_{JM, J'M'} = c^{\tau\tau'}_J \delta_{JJ'}\delta_{MM'}. \tag{7}$$

Действие генератора N_3 на элементы канонического базиса дано в упражнении 19.7.3.4. Взяв теперь матричный элемент равенства $\Gamma_0 = [[\Gamma_0, N_3], N_3]$ в каноническом базисе между базисными элементами $|\tau JM\rangle$ и $|\tau\,(J \pm 1)\;M\rangle$, мы получим шесть линейных уравнений для трех неизвестных $c^{\tau\tau'}_J$, $c^{\tau\tau'}_{J-1}$ и $c^{\tau\tau'}_{J+1}$. Предоставляем в качестве упражнения читателю выписать явно эти уравнения. Решая первые три уравнения относительно этих неизвестных и подставляя полученные выражения в остальные три

уравнения, нетрудно убедиться, что $c_J^{\tau\tau'}$ может быть отличным от нуля лишь в том случае, когда τ $(j_0 j_1)$ и τ' $(j_1' j_0')$ таковы, что

$$[j_0', j_1'] = [j_0 \pm 1, j_1] \tag{8}$$

или

$$[j_0', j_1'] = [j_0, j_1 \pm 1]. \tag{8'}$$

Замечание 1. Заметим, что условиям (3) удовлетворяют также и конечномерные представления. Действительно, воспользовавшись соответствием между индексами $[j_0 j_1]$ и (J_1, J_2), характеризующими конечномерное представление $D^{(J_1, J_2)}$, которое задается формулами

$$J_1 = \frac{j_0 + j_1 - 1}{2}, \quad J_2 = \frac{j_1 - j_0 - 1}{2},$$

находим, что, например, прямые суммы

$$D(\Lambda) = D^{(0,0)} \oplus D^{(1/2, 1/2)},$$
$$D(\Lambda) = D^{(1,0)} \oplus D^{(0,1)} \oplus D^{(1/2, 1/2)}$$

удовлетворяют условию (3). Значит, в этих случаях существует конечномерное уравнение Гельфанда—Яглома типа (1).

Замечание 2. Собственные значения операторов Казимира $C_2 = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2$ и $C_2' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{N}$ для представления $[j_0 j_1]$ равны $j_0^2 + j_1^2 - 1$ и $2ij_0 j_1$ (упражнение 19.7.3.1). Действие оператора четности имеет вид $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{N} \to -\boldsymbol{N}$. Поэтому преобразованием четности для $[j_0 j_1]$ является $[j_0, -j_1]$. Следовательно, ввиду соотношений (3) Γ_μ существует на прямой сумме пространств представлений

$$\text{а)} \quad [0, j_1] \text{ с } [1, j_1], \quad [0, j_1 + 1], \quad [0, j_1 - 1] \tag{9}$$

и

$$[j_0, 0] \text{ с } [j_0 + 1, 0], \quad [j_0 - 1, 0], \quad [j_0, 1], [j_0, -1], \tag{10}$$

$$\text{б)} \quad [j_0, j_1] (j_0 \neq 0, j_1 \neq 0) \text{ с набором } [j_0', j_1'], \tag{11}$$

как в (3), и с таким же набором, соответствующим $[j_0', -j_1']$.

Б. *Волновое уравнение Майораны*

Теорема Гельфанда—Яглома показывает, что в общем случае требуется по крайней мере два неприводимых представления, чтобы можно было определить векторный оператор Γ_μ в несущем пространстве H. Однако если взять унитарное неприводимое представление группы SL (2, C) в виде $[j_0, j_1] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то в силу теоремы 1 $[j_0', j_1'] = \left[0, -\frac{1}{2}\right]$ есть второе представление, которое вместе с $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ определяет оператор Γ_μ. Но, как следует из уп-

ражнения 19.7.3.2, $\left[0, -\frac{1}{2}\right]$ эквивалентно $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Значит, в этом случае векторный оператор может быть определен в пространстве $H^{[0,\,1/2]}$ неприводимого представления $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Аналогичная ситуация имеет место для представления $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Соответствующее волновое уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0, \tag{12}$$

ассоциированное с представлением $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ или $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$, называется уравнением Майораны. Эти уравнения были введены Майораной [566] в качестве возможного способа избавления от состояний с «отрицательной энергией» в теории Дирака, что вызывало в то время серьезные затруднения.

Найдем теперь спектр уравнения Майораны, ассоциированного с представлением $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Полагая, что p является времениподобным импульсом, и переходя в систему покоя $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$, мы получаем

$$(\Gamma_0 m - \varkappa)\,\psi(\overset{\circ}{p}) = 0. \tag{13}$$

Для получения спектра оператора Γ_0 возьмем специальную реализацию представления $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Пусть a_i и a_i^*, $i = 1, 2$, — операторы рождения и уничтожения. Тогда векторы $\left|\left[\frac{1}{2}, 0\right];\ JM\right\rangle$ в пространстве $H^{[1/2,\,0]}$ можно реализовать при помощи формулы

$$\left|\left[\frac{1}{2}, 0\right];\ JM\right\rangle = N a_1^{*J+M} a_2^{*J-M} \left|0\right\rangle, \tag{14}$$

где N — нормировочный множитель. Генераторы $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{N}$ группы SL (2, C) в реализации (14) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \frac{1}{2} a^* \boldsymbol{\sigma} a, \\ \boldsymbol{N} &= \frac{i}{4} (a^* \boldsymbol{\sigma} C a^* + a C \boldsymbol{\sigma} a), \end{aligned} \tag{15}$$

где σ — матрицы Паули и C равно $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ввиду соотношений (6) оператор Γ_0 должен коммутировать с $\boldsymbol{J}$ и удовлетворять равенству $[[\Gamma_0, N_3], N_3] = -\Gamma_0$. Легко проверить, что оператор второго порядка по a и a^*, удовлетворяющий этим условиям, имеет вид оператора числа частиц

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}(a^* a + 1). \tag{16}$$

С учетом формулы (5) получаем

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{i}{4}(a^*\boldsymbol{\sigma}Ca^* - aC\boldsymbol{\sigma}a). \tag{17}$$

Действие Γ_0 на состояния (14) дает

$$\Gamma_0 \left| \left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM\right\rangle = \left(J + \frac{1}{2}\right) \left| \left[\frac{1}{2}, 0\right]; JM\right\rangle. \tag{18}$$

Воспользовавшись затем соотношением (13), получаем массовую формулу для уравнения Майораны

$$m_J = \frac{\varkappa}{J + \frac{1}{2}}, \quad J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \tag{19}$$

Такая же массовая формула получается для уравнения Майораны, ассоциированного с представлением $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (с $J = 0$, 1, 2, ... в этом случае).

Интересно, что набор операторов $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{N}$ и Γ_μ замыкается до алгебры Ли so (2, 3). Следовательно, пространства $H^{[1/2, 0]}$ или $H^{[0, 1/2]}$ являются в то же время пространствами неприводимых представлений группы SO (2, 3).

Уравнения Майораны (12) имеют также решения для пространственноподобных импульсов $p^2 = m^2 < 0$. В этом случае в системе покоя $\overset{\circ}{p} = (0, 0, 0, m)$ получаемое уравнение имеет вид

$$(\Gamma_3 m - \varkappa)\psi(\overset{\circ}{p}) = 0. \tag{20}$$

Диагонализируя теперь Γ_3, находим непрерывный спектр масс для этого случая. Это следует также и непосредственно из наблюдения, что Γ_3 является генератором некомпактной подгруппы в SO (3, 2), и из того факта, что все такие генераторы имеют непрерывные спектры.

Минимальная связь

Важность линейных уравнений типа уравнения Дирака (2.6) или уравнения Майораны (12) заключается в том, что поведение частиц во внешнем электромагнитном поле с потенциалом $A_\mu(x)$ описывается при помощи подстановки

$$P_\mu \to P_\mu - eA_\mu(x), \tag{21}$$

где e—электрический заряд. Таким образом, мы имеем уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu - e\Gamma_\mu A^\mu(x) - \varkappa)\psi = 0. \tag{22}$$

По сравнению с уравнением для свободной частицы второй член $e\Gamma_\mu A^\mu(x)$ появляется в качестве члена взаимодействия. Эта процедура, получаемая по правилу (21), называется *минимальной*

связью. Таким образом, оператор $e\Gamma_\mu$ является оператором тока квантовой системы. Сами потенциалы $A_\mu(x)$ в свою очередь продуцируются токами. Следовательно, в общем случае мы имеем систему связанных уравнений (22) и

$$\Box A_\mu(x) = j_\mu(x). \tag{23}$$

Но для заданных внешних полей $A_\mu(x)$ можно ограничиться уравнением (22).

В. *Обобщения уравнений Гельфанда—Яглома*

Спектр масс (19) весьма нефизичен, так как масса уменьшается при возрастании спина. Этот вид спектра типичен для общего уравнения Гельфанда—Яглома (1). К тому же выводимый из уравнения (23) магнитный момент оказывается с неправильным знаком. Естественно поэтому искать более общее релятивистское волновое уравнение вида

$$(\Gamma_\mu p^\mu - K)\,\psi(p) = 0, \tag{24}$$

где K — инвариантный оператор группы Лоренца. Для $K = \alpha p_\mu p^\mu + \varkappa$ получаем

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \alpha p_\mu p^\mu - \varkappa)\,\psi = 0. \tag{25}$$

Это уравнение также можно точно решить, переходя в систему покоя. Поступая так же, как в случае простого уравнения Майораны, находим

$$m_J = \frac{J + \frac{1}{2}}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varkappa\alpha}{\left(J + \frac{1}{2}\right)^2}}\right). \tag{26}$$

В частности, при $\varkappa = 0$ мы имеем линейный по спину спектр

$$m_J = \frac{1}{2\alpha}\left(J + \frac{1}{2}\right).$$

Другая интересная модель обобщенного уравнения (24) получается, если взять волновую функцию $\psi(p)$, которая преобразуется согласно представлению $(D^{(1/2,\,0)} \oplus D^{(0,\,1/2)}) \otimes U^{[j_0,\,0]}$. Полагая в этом случае $K = -(M_0 + M_1\sigma_{\mu\nu}M^{\mu\nu})$, где $M^{\mu\nu}$ — генераторы представления $U^{[j_0,\,0]}$, а M_0 и M_1 — скаляры, мы получаем следующее волновое уравнение:

$$(\gamma_\mu p^\mu + M_0 + M_1\sigma_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\,\psi(p) = 0. \tag{27}$$

Переходя к системе покоя и проводя выкладки, аналогичные случаю уравнений Майораны, получаем следующую массовую формулу:

$$\pm m_J = M_1\left(J + \frac{1}{2}\right) \pm \left\{(M_0 - M_1)^2 + \right.$$

$$\left. + M_1^2\left[J(J+1) - j_0(j_0+1) - \frac{3}{4}\right]\right\}. \qquad (28)$$

Уравнение (27) называют уравнением Аберса, Гродски и Нортона [2].

Г. *Применение бесконечнокомпонентных волновых уравнений*

В § 1 мы вложили индуцирующее представление подгруппы K группы G в представление $D(G)$ группы G, чтобы иметь явно ковариантные волновые уравнения. Мы можем также вложить $D(G)$ в представление $D(\breve{G})$ более широкой группы $\breve{G}$, содержащей G (а значит, и K). Кратность представления $D(K)$ в $D(\breve{G})$ теперь будет, вообще говоря, гораздо большей. Физически эти кратности будут отождествляться с дополнительными внутренними степенями свободы системы.

Приведем теперь важный пример применения этого метода. Пусть $\breve{G} = SO(4, 2)$. Алгебра Ли группы SO (4, 2) имеет базис $L_{ab} = -L_{ba}$, $a, b = 0, 1, 2, \ldots, 5$, содержащий генераторы $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, подгруппы SO (3, 1). По отношению к $M_{\mu\nu}$ элементы $L_{\mu 5} = \Gamma_\mu$ являются компонентами 4-векторного оператора, а $L_{45} = S$ — скалярным оператором. Поэтому наиболее общим лоренц-ковариантным волновым уравнением, линейным по элементам алгебры Ли, является уравнение

$$(\Gamma_\mu p^\mu + \beta S + \gamma)\,\psi(p) = 0. \qquad (29)$$

Уравнение (29) также может быть решено путем преобразования его в систему покоя $\overset{\circ}{p} = (p_0, 0, 0, 0)$:

$$(\Gamma_0 p^0 + \beta S + \gamma)\,\psi(0) = 0. \qquad (30)$$

Здесь мы можем диагонализовать либо Γ_0, имеющий дискретный спектр как генератор компактной подгруппы, либо S, спектр которого как генератора некомпактной подгруппы непрерывен.

Выберем, например, наиболее вырожденный дискретный класс представлений группы SO (4, 2), рассмотренный в гл. 15, и выберем в качестве базиса собственные векторы операторов Γ_0, J^2, J_3,

обозначаемые $|n, J, J_3\rangle$. В этом представлении инвариантные операторы группы SO (4, 2) имеют значения

$$C_2 = \frac{1}{2} L_{ab}L^{ab} = -3,$$
$$C_3 = \varepsilon_{abcdef}L^{cd}L^{ef}L^{ab} = 0, \tag{31}$$
$$C_4 = L_{ab}L^{bc}L_{cd}L^{da} = -12.$$

Благодаря тому факту, что Γ_0, S и $L_{04} \equiv T$ генерируют подгруппу SU (1, 1), мы можем решить (30), определяя $\tilde{\psi}(\overset{\circ}{p})$ при помощи

$$\psi(\overset{\circ}{p}) \equiv \exp(i\bar{\theta}_n L_{04})\,\tilde{\psi}(\overset{\circ}{p}), \quad \Gamma_0 |\tilde{\psi}_n(\overset{\circ}{p})\rangle = n|\tilde{\psi}_n(\overset{\circ}{p})\rangle \tag{32}$$

и подходящим образом выбирая θ_n. Тогда

$$[(m^2 - \beta^2)^{1/2}\Gamma_0 + \gamma]\,\tilde{\psi}(\overset{\circ}{p}) = 0, \tag{33}$$

или

$$m^2 = (\beta^2 - \gamma^2/n^2). \tag{34}$$

Рассмотрим интересный с физической точки зрения случай, когда β и γ являются функциями полной массы m системы. Ясно, что в этом случае спектр масс может отличаться от задаваемого формулой (34). Положим

$$\beta = m\,\frac{\omega^2 - m_1^2 + (m - m_2)^2}{\omega^2 + m_1^2 - (m - m_2)^2}, \quad \gamma = \frac{-2\alpha\omega m\,(m + m_1 - m_2)}{\omega^2 + m_1^2 - (m - m_2)^2}. \tag{35}$$

Решая (34) относительно m, получаем

$$m = m_2 + m_1\,\frac{1 - \alpha^2/n^2}{1 + \alpha^2/n^2}. \tag{36}$$

Разложение по α^2/n^2 дает

$$m = m_1 + m_2 - 2m_1\alpha^2/n^2,$$

что совпадает со спектром масс нерелятивистского атома водорода. Покажем теперь, что, выбирая подходящим образом представление операторов Γ_0 и S, мы получим, что уравнение (30) с заданными в (35) β и γ может интерпретироваться как уравнение Клейна—Гордона со скалярным и векторным потенциалом типа $1/r$ и равными константами связи при обоих взаимодействиях. Действительно, возьмем представление алгебры so (4, 2) через дифференциальные операторы в $L^2(R^3)$ (гл. 12, § 2). Генераторы подалгебры su (1, 1) в этом случае имеют вид [см. соотношение (12.2.5)]

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2\omega}(-r\nabla^2 + \omega^2 r),$$
$$S = \frac{1}{2\omega}(-r\nabla^2 - \omega^2 r), \tag{37}$$
$$T = -i\mathbf{r}\nabla - i.$$

Подставляя эти генераторы в уравнение (30), определяя $E_1 \equiv m - m_2$ и используя выражения (35) для β и γ, получаем

$$\left[\frac{1}{2\omega}(\omega^2 + m_1^2 - E_1^2)(-r\nabla^2 + \omega^2 r) + \frac{1}{2\omega}(\omega^2 - \right.$$

$$\left. - m_1^2 + E_1^2)(-r\nabla^2 - \omega^2 r)\right]\psi = 2\alpha\omega(E_1 + m_1)\psi.$$

После элементарных вычислений получаем

$$\left[-\nabla^2 - \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(m_1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\psi = 0, \tag{38}$$

т. е. уравнение Клейна—Гордона со скалярным потенциалом $\varphi(r) = -\alpha/r$ и векторным потенциалом $V(r) = -\alpha/r$. Из равенства (36) приходим к следующему спектру для E_1:

$$E_1 = m_1 \frac{1 - \alpha^2/n^2}{1 + \alpha^2/n^2}. \tag{39}$$

Разлагая по α^2/n^2, получаем

$$E_1 = m_1 - 2m_1\alpha^2/n^2.$$

Это соответствует спектру уравнения Шредингера с потенциалом $U(r) = -2\alpha/r$, что неудивительно, поскольку в нерелятивистском приближении скалярный и векторный потенциалы складываются.

Таким образом, представляется замечательным, что уравнения типа (29) описывают релятивистским образом составные квантовые системы, такие, как атом водорода. Заметим, что обозначение состояний $|nJJ_3\rangle$ находится в согласии с квантовыми числами атома водорода. При помощи ковариантных уравнений (29) мы, таким образом, установили контакт с формализмом динамической группы квантовой механики, рассмотренным в гл. 12.

Другое представление алгебры su (1, 1) (37), именно

$$\Gamma_0' = \frac{1}{2}\left[-r\nabla^2 + r + \frac{1}{r}(-\alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right],$$

$$S' = \frac{1}{2}\left[-r\nabla^2 - r + \frac{1}{r}(-\alpha^2 - i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right], \tag{40}$$

$$T' = T = -ir\nabla - i, \quad \hat{r} = r/|r|,$$

где α — матрицы Дирака, приводит при подходящем выборе параметров к уравнению

$$[\Gamma_0' + S' - (E^2 - m^2)(\Gamma_0' - S') - 2\alpha E]\psi = 0$$

или

$$\left[p^2 - (E^2 - m^2) - \frac{2\alpha E}{r} - \frac{1}{r^2}(\alpha^2 + i\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right]\psi = 0, \tag{41}$$

что является уравнением Дирака второго порядка для кулоновского потенциала.

Наконец, пользуясь представлением, заданным в (12.2.22), мы получаем уравнение для дониума (dyonium), который является атомом, состоящим из двух дионов — частиц, обладающих как электрическим, так и магнитным зарядами. Алгебра Ли, которая решает уравнение для дониума, та же, что и в (37) или (40), если учесть замены

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \\ \mathrm{i}\alpha\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \to (\mu\sigma + \mathrm{i}\alpha\alpha) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}, \end{gathered} \tag{42}$$

где $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ и μ определены в лемме 12.2.5.

Д. *Интерпретация волновых уравнений с точки зрения динамической группы*

В предыдущих разделах ковариантные волновые уравнения были интерпретированы как проекции на определенные подпространства приводимых представлений группы Пуанкаре, индуцированных с представлений группы SL (2, C) [соотношение (1.12)].

Вторая интерпретация (которая объединяется с обсуждением в гл. 13, § 2) состоит в указании пространства состояний в системе покоя системы при помощи неприводимого представления U динамической группы $\mathcal{G} \supset \mathrm{SL}\ (2, C)$. Тогда состояния импульса P_μ получаются с помощью преобразования Лоренца (т. е. буста). Этот метод особенно полезен для бесконечнокомпонентных волновых уравнений, но он применим также и к конечнокомпонентным уравнениям.

Пример 1. Пусть $\mathcal{G} = O\ (4, 2)$. В качестве U возьмем 4-мерное неунитарное представление, в котором генераторы группы $\mathcal{G}$ заданы через 16 элементов алгебры матриц Дирака, как в упражнении 13.6.4.1.

Поскольку $\frac{1}{2} L_{56} = \gamma_0$ имеет собственные значения $n = \pm 1$, то, взяв простейшее массовое соотношение $mn = \varkappa$, мы можем записать

$$(m\gamma_0 - \varkappa)\, \psi(\overset{\circ}{p}) = 0, \tag{43}$$

где $\varkappa$ — фиксированная постоянная.

Действуя на это уравнение преобразованием Лоренца с параметром ξ

$$\begin{gathered} \psi(p) = \exp(\mathrm{i}\xi N)\, \psi(p), \\ N = \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma, \end{gathered} \tag{44}$$

получаем

$$(\gamma^\mu p_\mu - \varkappa)\, \psi(p) = 0,$$

что является уравнением Дирака (2.6).

Пример 2. Пусть $\mathcal{G} = O(4, 2)$. Пусть U — бесконечномерное унитарное представление $\mathcal{G}$ наиболее вырожденной серии; $\frac{1}{2} L_{56} = \Gamma_0$ имеет спектр $n = \mu + 1, \mu + 2, \ldots$. Простейшим линейным по генераторам группы массовым соотношением является

$$(M\Gamma_0 - \varkappa)\,\psi(\overset{\circ}{p}) = 0,$$

соответствующее массам $M_n = \varkappa/n$, $n = \mu + 1, \ldots$. Преобразуя это уравнение посредством $\exp(i\xi N)$ (преобразования Лоренца), мы получаем

$$(\Gamma_\mu p_\mu - \varkappa)\,\psi(p) = 0,$$

т. е. уравнение Майораны (3.12). Или, взяв более общее массовое соотношение

$$(M\Gamma_0 + \alpha M^2 - \varkappa)\,\psi(\overset{\circ}{p}) = 0,$$

мы получаем обобщенное уравнение Майораны (3.25).

Как показывают эти примеры, мы снова имеем процедуру индуцирования. Состояния в системе покоя $\psi(\overset{\circ}{p})$ преобразуются согласно представлению L подгруппы K в H: $\psi_k(\overset{\circ}{p}) = L_k\psi(\overset{\circ}{p})$, $k \in K$, и затем мы переходим к индуцированным представлениям группы Пуанкаре П при помощи (44).

Редукция U на группу SL (2, C) дает приводимое представление $\tilde{L}$ последней. Поэтому спинорные волновые функции $\psi(p)$ преобразуются по приводимому в общем случае представлению $\tilde{L}$ группы SL (2, C):

$$(U_{(a,\,\Lambda)}\psi)(p) = \exp(ip\tilde{a})\,L(\Lambda^{-1}p).$$

Общая процедура такова:

1. Выбор динамической группы $\mathcal{G}$ и ее представления U зависит от внутренней динамики и степеней свободы системы (т. е. спина или орбитальных и радиальных возбуждений). Это отражается в ряде квантовых чисел и состояний. На фиг. 2 и 3 изображены две весовые диаграммы для $\mathcal{G} = O(4, 2)$, где j и n — собственные значения операторов L^2 и $L_{56} = \Gamma_0$ соответственно (см. также гл. 12, фиг. 1).

2. Пусть Γ_μ — векторный оператор в U, а S — скалярный оператор. Берем любое соотношение, включающее в себя величины $P_0\Gamma^0$, $P_\mu P^\mu$, S, ..., на пространстве H представления U:

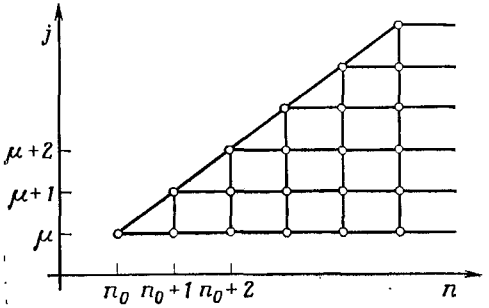
$$f(\Gamma_0 P^0,\ P^2,\ S)\,\psi(\overset{\circ}{p}) = 0,\ \ \psi(\overset{\circ}{p}) \in H, \tag{45}$$

и преобразуем его при помощи преобразования Лоренца типа (44):

$$f(\Gamma_\mu P^\mu,\ P^2,\ S)\,\psi(p) = 0. \tag{46}$$

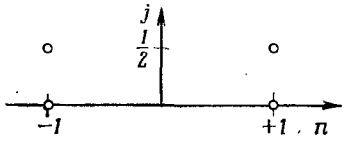
Это — ковариантное уравнение, которое заключает в себе постулированное массовое соотношение (45).

Роль динамической группы $\mathcal{G}$ в таком рассмотрении заключается в том, что она несет информацию о внутренней динамике системы, а потому диктует, какое представление группы SL (2, C) следует выбрать для построения ковариантного волнового уравнения.



Фиг. 2.

Фиг. 3.



Упомянутый выбор был до сих пор в нашем обсуждении в § 1 произвольным. Уравнения (45) и (46) можно обобщить на зависящие от спина массовые формулы.

E. *Физические приложения матричных элементов представлений полупростых некомпактных групп Ли*

Пусть G — группа Ли, а U_g — ее представление в H. Определенные элементы группы могут быть параметризованы в виде

$$\exp(i\theta^k X_k),$$

где θ^k — групповые параметры, а X_k — генераторы алгебры Ли группы G. Пусть $u_m \in H$ — базис в пространстве представления U_g. Матричные элементы будем обозначать через

$$D_{mn}(\theta) = \langle m \,|\, \exp(i\theta \cdot X) \,|\, n \rangle \tag{47}$$

относительно скалярного произведения в H. Понятно, что эти функции обобщают функции D^j_{mn} группы SU (2).

Для компактных полупростых групп SO (n) выражения для D (θ) были даны [1]) Виленкиным [819]. Для некомпактного случая SO (2, 1) эти функции были впервые получены Баргманном [37]. В физической литературе известно много других результатов для SO (3, 1) и для некоторых представлений групп SO (4, 1), SO (4, 2), ...

---

[1]) Для так называемых представлений класса 1 относительно подгруппы SO (n — 1), или сферических представлений (см. по этому поводу также [887]). Относительно матричных элементов D (θ) для общих представлений группы SO (n) см. [888, 890]. — *Прим. перев.*

Рассмотрим волновое уравнение типа (12), (25) или (29).

Электромагнитная связь системы описывается с помощью процедуры минимальной связи [ср. (21)].

Физическая амплитуда вероятности перехода задается при помощи матричных элементов оператора тока Γ_μ между двумя состояниями импульсов p_1 и p_2 [см. (12)]

$$A_\mu = \langle \psi_m(p_1) \,|\, \Gamma_\mu \,|\, \psi_n(p_2) \rangle.$$

С помощью преобразования Лоренца получаем

$$A_\mu = \langle \psi_m(\mathring{p}) \,|\, \exp(-i\xi \cdot N)\, \Gamma_\mu \exp(i\xi \cdot N) \,|\, \psi_n(\mathring{p}) \rangle.$$

Эти матричные элементы следует в общем случае вычислять в бесконечномерном представлении U динамической группы $\mathcal{G}$, например SO (4, 2). Таким образом, амплитуды переходов могут быть сведены к матричным элементам $D_{mn}(\theta)$ типа (47). В физической литературе появляются и более общие матричные элементы [96].

§ 4. Расширения групп и приложения

А. *Расширение группы*

Расширение группы играет важную роль во многих разделах квантовой теории. Рассмотрим здесь связь расширения группы с когомологией.

Рассмотрим следующую последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\to G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+2} \to. \tag{1}$$

Напомним, что если ядро $\operatorname{Ker} f_n = I$, то f_n называется инъективным (в этом случае образ $f_n \cong G_n$), если же образ $f_n = G_{n+1}$, то f_n называется сюръективным.

Определение 1. Последовательность (1) является *точной последовательностью*, если образ $f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ для всех n.

Примеры:

$$1)\quad 1 \to \operatorname{Ker} f \to G \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \to 1, \tag{2}$$

$$2)\quad 1 \to C(G) \to G \xrightarrow{f} J(G) \to 1, \tag{3}$$

где $C(G)$ — центр группы G, а $J(G)$ — группа нетривиальных внутренних автоморфизмов. Ясно, что $G/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ и $G/C(G) \cong \cong J(G)$.

$$3)\quad 1 \to J(G) \to \operatorname{Aut} G \to A(G) \to 1, \tag{4}$$

где $A(G)$ представляет собой классы автоморфизмов группы G по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов, $A(G) \cong \cong \operatorname{Aut} G/J(G)$.