Рассмотрим волновое уравнение типа (12), (25) или (29).

Электромагнитная связь системы описывается с помощью процедуры минимальной связи [ср. (21)].

Физическая амплитуда вероятности перехода задается при помощи матричных элементов оператора тока Γ_μ между двумя состояниями импульсов p_1 и p_2 [см. (12)]

$$A_\mu = \langle \psi_m(p_1) \,|\, \Gamma_\mu \,|\, \psi_n(p_2) \rangle.$$

С помощью преобразования Лоренца получаем

$$A_\mu = \langle \psi_m(\mathring{p}) \,|\, \exp(-i\xi \cdot N)\, \Gamma_\mu \exp(i\xi \cdot N) \,|\, \psi_n(\mathring{p}) \rangle.$$

Эти матричные элементы следует в общем случае вычислять в бесконечномерном представлении U динамической группы $\mathcal{G}$, например SO (4, 2). Таким образом, амплитуды переходов могут быть сведены к матричным элементам $D_{mn}(\theta)$ типа (47). В физической литературе появляются и более общие матричные элементы [96].

§ 4. Расширения групп и приложения

А. *Расширение группы*

Расширение группы играет важную роль во многих разделах квантовой теории. Рассмотрим здесь связь расширения группы с когомологией.

Рассмотрим следующую последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\to G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+2} \to. \tag{1}$$

Напомним, что если ядро $\operatorname{Ker} f_n = I$, то f_n называется инъективным (в этом случае образ $f_n \cong G_n$), если же образ $f_n = G_{n+1}$, то f_n называется сюръективным.

Определение 1. Последовательность (1) является *точной последовательностью*, если образ $f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ для всех n.

Примеры:

$$1)\quad 1 \to \operatorname{Ker} f \to G \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \to 1, \tag{2}$$

$$2)\quad 1 \to C(G) \to G \xrightarrow{f} J(G) \to 1, \tag{3}$$

где $C(G)$ — центр группы G, а $J(G)$ — группа нетривиальных внутренних автоморфизмов. Ясно, что $G/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ и $G/C(G) \cong \cong J(G)$.

$$3)\quad 1 \to J(G) \to \operatorname{Aut} G \to A(G) \to 1, \tag{4}$$

где $A(G)$ представляет собой классы автоморфизмов группы G по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов, $A(G) \cong \cong \operatorname{Aut} G/J(G)$.

Определение 2. Группа E называется *расширением группы G посредством K*, если она удовлетворяет точной последовательности

$$1 \to K \to E \to G \to 1. \tag{5}$$

Мы имеем тогда, что K является инвариантной (нормальной) подгруппой в E, и $E/K = G$; таким образом, E можно считать состоящей из смежных классов kG, $k \in K$ (записанных мультипликативно). Важной математической задачей является нахождение всех групп E, таких, что $E/K = G$ и K — инвариантная подгруппа в E.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & & & \\
 & C(K) \arrow[d] & & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & J(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\,K \arrow[r] & A(K) \arrow[r] & 1 \\
 & 1 & & &
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Заметив, что элементы из E индуцируют автоморфизмы подгруппы K при помощи $k \to x^{-1}kx$ при любом $x \in E$, мы получаем гомоморфизмы $E \to \mathrm{Aut}\,K$ и $G \to A(K)$. В общем случае, однако, последний гомоморфизм не вытекает из гомоморфизма $G \to \mathrm{Aut}\,K$.

Б. *Расширения группы Пуанкаре*

Полная релятивистская инвариантность включает также дискретные операции симметрии пространственного отражения Σ и отражения времени Θ.

Введем две операции отражения Σ и Θ. Их отождествление с четностью P и отражением времени T или их комбинациями, например PC, PT, ..., зависит от правил суперотбора. Тогда полная группа Лоренца состоит из смежных классов

$$\boldsymbol{L} = (\Lambda,\ \Lambda\Sigma,\ \Lambda\Theta,\ \Lambda\Sigma\Theta), \tag{7}$$

где Λ — собственная группа Лоренца. $\boldsymbol{L}$ является расширением группы Λ посредством группы отражений. Снова пользуемся группой SL (2, C), накрывающей группы Λ, и записываем элементы группы Пуанкаре в виде

$$(a,\ \Lambda) \to (a\cdot\sigma,\ A), \quad A \in \mathrm{SL}\,(2,\ C), \tag{8}$$

где $a\cdot\sigma = a^{\mu}\sigma_{\mu}$ (гл. 17, § 2). Введем обозначения

$U(a\cdot\sigma,\ A)$ — унитарные представления собственной группы Пуанкаре;

$$\begin{aligned} &U(\Sigma) \text{ — операторы, отвечающие } \Sigma, \\ &\qquad\quad \text{предполагаемые унитарными;} \\ &U(\Theta),\ U(\Theta\Sigma) \text{ — операторы, отвечающие } \Theta \text{ и } \Theta\Sigma, \\ &\qquad\quad \text{предполагаемые антиунитарными.} \end{aligned} \tag{8}$$

В гл. 13 мы обсуждали квантовомеханические унитарные и антиунитарные операторы. Соотношение между собственными группами, полными группами и накрывающими группами можно представить в виде следующих последовательностей:

1. Группа трансляций T^4, собственная группа Пуанкаре Π_0, собственная группа Лоренца Λ, полная группа Пуанкаре Π и полная группа Лоренца L удовлетворяют

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & T^4 \arrow[r] & \Pi_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T^4 \arrow[r] & \Pi \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & C_2 \oplus C_2 \arrow[d] & C_2 \oplus C_2 \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

2. Квантовомеханическими накрывающими группами для (9) являются

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & Z_2 \arrow[d] & Z_2 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & T_4 \arrow[r] & \overline{\Pi}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}(2, C) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T_4 \arrow[r] & \overline{\Pi} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Lambda} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Здесь Z_2 — первая группа гомотопий группы Λ, т. е. $\mathrm{SL}(2, C)/Z_2 = \Lambda$.

Установим теперь представления расширенной группы. С помощью выбора эквивалентных фазовых множителей мы можем положить $U(\Sigma) = I$ (гл. 13). Пусть $\overset{*}{U}(\Theta)^2 = \varepsilon_\theta$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)^2 = \varepsilon_{\theta\Sigma}$. Из закона ассоциативности $\overset{*}{U}\overset{*}{U}{}^2 = \overset{*}{U}{}^2\overset{*}{U}$ следует, что для обеих величин ε справедливо $\varepsilon^2 = \pm 1$. Соответственно мы имеем четыре типа представлений в зависимости от $\varepsilon_\theta = \pm 1$, $\varepsilon_{\theta\Sigma} = \pm 1$. Тогда $\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ определяются с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. Затем определяем фазы между произведениями операторов $U(\Sigma)$,

$\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$, и получаем из группового закона следующую таблицу умножения:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & U(\Sigma) & \overset{*}{U}(\Theta) & \overset{*}{U}(\Theta\Sigma) \\
\hline
U(\Sigma) & 1 & \overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \overset{*}{U}(\Theta) \\
\overset{*}{U}(\Theta) & \varepsilon_\theta\varepsilon_{\theta\Sigma}\overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \varepsilon_\theta & \varepsilon_\theta U(\Sigma) \\
\overset{*}{U}(\Theta\Sigma) & \varepsilon_\theta\varepsilon_{\theta\Sigma}\overset{*}{U}(\Theta) & \varepsilon_\theta U(\Sigma) & \varepsilon_{\theta\Sigma}
\end{array}
\tag{11}
$$

Это таблица умножения для конечной группы (гл. 7).

Следующим вопросом должно быть определение фаз между $U(\Sigma)$, $\overset{*}{U}(\Theta)$, $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ и представлениями $U(a, \Lambda)$ собственной группы. Записываем групповой закон в виде

$$U(\Sigma)\,U(a,\ \Lambda)\,U(\Sigma^{-1}) = \omega(a,\Lambda)\,U(\Sigma a,\ \Sigma\Lambda\Sigma^{-1}).$$

Если рассмотреть произведение двух таких преобразований, получим для фазы уравнение

$$\omega(a + \Lambda(a)\,b,\ AB) = \omega(a,\ A)\,\omega(b,\ B). \tag{12}$$

Таким образом, ω является одномерным представлением группы Пуанкаре П. Но П не имеет инвариантной подгруппы с абелевой фактор-группой; следовательно, $\omega = 1$.

Аналогично фаза ω' между $\overset{*}{U}(\Theta)$ и $\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)$ должна равняться единице.

Следовательно, новые возможности не вводятся, и мы имеем четыре возможные квантовомеханические полные группы Пуанкаре, соответствующие (8), в зависимости от множителей в таблице умножения:

$$U(a,\ \Lambda) = (U(a,\ \pm A),\quad U(a, \pm A)\,U(\Sigma),\quad U(a,\ \pm A)\,\overset{*}{U}(\Theta),$$

$$U(a,\ \pm A)\,\overset{*}{U}(\Theta\Sigma)). \tag{13}$$

Заметим, что использование элемента $\pm A \in \mathrm{SL}(2, C)$ в квантовомеханическом представлении $\Lambda \in \mathrm{SO}(3, 1)$, конечно, уже есть расширение группы с математической точки зрения. Группа Пуанкаре может быть далее расширена посредством других операторов отражения, как, например, оператора зарядового сопряжения C.

Пусть $\{|\,p,\ \sigma\rangle\}$ — векторы из пространства представления $U(a, \Lambda)$ собственной группы Пуанкаре, где p^2 определяет орбиту (гл. 17, § 2). Рассмотрим теперь векторы $U(\Sigma)\,|\,\tilde{p},\ \sigma\rangle$, где $\tilde{p}_\mu = (p_0, -\boldsymbol{p})$ и где мы отождествили Σ с оператором четности. Как векторы $|\,p,\ \xi\rangle$, так и $U(\Sigma)\,|\,\tilde{p},\ \sigma\rangle$ преобразуются одинаковым

образом относительно собственной группы Пуанкаре. Поэтому мы можем определить собственные состояния четности согласно

$$|p, \sigma, \pm\rangle = |p, \sigma\rangle \pm U(\Sigma)|p, \sigma\rangle.$$

Если ни одно из этих состояний не исчезает, мы имеем новое квантовое число — четность — с собственными значениями ± 1 и, следовательно, удвоение пространства представления. Являются ли оба эти пространства наблюдаемыми, зависит от существования правил суперотбора (гл. 13).

B. *Классификация расширений*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если K абелева и $K \subset C$ (C — центр группы E), то E называют *центральным расширением*. Имеем тогда $C(K) = K$, $J(K) = 1$, $\mathrm{Aut}\, K = A(K)$.

Предположим, что нам задан гомоморфизм σ: $G \to \mathrm{Aut}\, K$; часто это описывают словами так: G действует посредством σ на K или K является G-модулем (по отношению к σ). Будем исследовать проблему описания групповых расширений

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \xrightarrow{h} G \to 1,$$

таких, что внутренние автоморфизмы группы E при сужении на K совпадают с $\sigma \circ h$. Отметим, что такое расширение всегда существует, именно полупрямое произведение $E = K \rtimes G$ с умножением, определенным согласно

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha + \sigma_a\beta, ab), \quad \alpha, \beta \in K, \quad a, b \in G, \tag{14}$$

является таким расширением; оно называется *тривиальным расширением*. Заметим, что для тривиальных расширений

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \xrightarrow{h} G \to 1$$

существует гомоморфизм групп D: $G \to E$, такой что $h \circ D = 1$ (D называется *сечением* или *разбиением*). Охарактеризуем нетривиальные расширения при помощи не обязательно гомоморфных сечений, т. е. расширения

$$1 \to K \xrightarrow{f} E \underset{D}{\overset{h}{\rightleftarrows}} G \to 1,$$

где D: $G \to E$ удовлетворяет $h \circ D = 1$. Мы будем иметь дело исключительно со случаем абелевой группы K. Рассмотрим $f(\alpha)D(a)$, $\alpha \in K$, $a \in G$. При фиксированном a, варьируя α, мы получаем слои расслоения E с базой G (т. е. смежные классы для $f(K)$). При фиксированном α, варьируя a, мы имеем сечения. В частности, $f(1)D(G) \cong G$. $D(a)D(b)$ и $D(ab)$ лежат в одном

и том же смежном классе (слое) относительно $f(K)$, так как оба они при гомоморфизме h отображаются в ab. Значит, они могут отличаться лишь «фазой»

$$D(a)D(b) = \omega(a, b)D(ab). \tag{15}$$

Из ассоциативности группового закона умножения следует

$$\omega(a, b) + \omega(ab, c) - \sigma_a\omega(b, c) - \omega(a, bc) = 0. \tag{16}$$

Такое отображение ω: $G \times G$ в K (отождествляющее K с $f(K)$) называется *фактор-системой*. Мы желаем, однако, пренебречь различием, возникающим при замене отображения D другим отображением D', таким, что $D'(a) = \varphi(a)D(a)$, где $\varphi(a) \in K$. D' приводит к другой фактор-системе ω', такой, что

$$\omega'(a, b) = \omega(a, b) + \theta(a, b), \tag{17}$$

где $\theta(a, b)$ задана согласно

$$\theta(a, b) = \varphi(a) + \sigma_a\varphi(b) - \varphi(ab)$$

и называется тривиальной фактор-системой.

Нормированная фактор-система по определению удовлетворяет

$$D(1) = 1, \quad \text{или} \quad \omega(a, 1) = \omega(1, b) = \omega(1, 1) = 0. \tag{18}$$

Обратно, если нам задан гомоморфизм σ: $G \to \mathrm{Aut}\, K$ и нормированная фактор-система $\omega(a, b) \in K$, мы можем построить расширение E группы G посредством K с элементами (α, a), $\alpha \in K$, $a \in G$, и с законом композиции

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha, +\sigma_a\beta + \omega(a, b), ab), \tag{19}$$

где $\omega(a, b)$ удовлетворяет (18). Единичным элементом в E является $(0, 1)$, а элементом, обратным к (α, a), является

$$(\alpha, a)^{-1} = (\sigma_{a^{-1}}\alpha\omega(a^{-1}, a), a^{-1}). \tag{20}$$

Две фактор-системы, отличающиеся тривиальной фактор-системой, дают изоморфные, или эквивалентные, расширения. Кроме того, внутренний автоморфизм на E индуцирует на K автоморфизм σ, поскольку

$$(\alpha, a)(\alpha', 1)(\alpha, a)^{-1} = (\sigma_a\alpha', 1). \tag{21}$$

Математическая проблема состоит теперь в том, чтобы найти все нормированные фактор-системы с точностью до тривиальной. Результат может быть сформулирован как следующее утверждение.

Утверждение 1. *Двумерная группа когомологии $H^2(G, K)$ есть в точности группа всех (эквивалентных классов) тех расширений E группы G посредством K, которые реализуют заданное действие σ группы G на K.*

Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим теперь связь расширений группы с гомологией и когомологией.

«Гомология» алгебры Ли или группы (или ассоциативной алгебры) восходит к гомологии топологических пространств (т. е. связности, см. гл. 2). Группы гомологий вполне общим образом описываются на языке цепей и их границ. n-Мерной цепью является формальная линейная комбинация n-симплексов в пространстве. Все n-цепи образуют свободную абелеву группу C_n. Комплекс цепей C — это последовательность

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \leftarrow \ldots,$$

где граничные гомоморфизмы ∂ удовлетворяют $\partial\partial = 0$. Его группой гомологии в размерности n является

$$H_n(C) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}. \tag{22}$$

Опишем теперь соответствующие группы когомологий. n-Мерной коцепью является гомоморфизм $f: C_n \to K$ (абелева группа), кограничным оператором δ_n является отображение δ: $\operatorname{Hom}(C_n, K) \to \operatorname{Hom}(C_{n+1}, K)$, определяемое (однозначно) условием

$$\delta_n f = f\partial.$$

Поэтому мы получаем комплекс коцепей

$$\to C_n \equiv \operatorname{Hom}(C_n, K) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} = \operatorname{Hom}(C_{n+1}, K) \to.$$

Ядра отображения δ являются коциклами (ядра отображения ∂ — циклами), а образы δ являются кограницами (образы ∂ — границами). Следовательно, n-мерная когомология комплекса C (или лежащего в основе пространства) с коэффициентами в K есть

$$H^n(C, K) = \frac{\operatorname{Ker} \delta_n}{\operatorname{Im} \delta_{n-1}}. \tag{23}$$

Когомология групп имеет дело с действием группы G на абелевой группе K:

$$\alpha \to \sigma_a \alpha, \quad \alpha \in K, \quad a \in G, \quad \sigma: G \to \operatorname{Aut} K,$$

и определяется, размерность за размерностью, при помощи следующих коциклов.

В размерности один коциклы являются «скрещенными гомоморфизмами» ϕ: $G \to K$, такими, что $\phi(ab) = \sigma_a \phi(b) + \phi(a)$ для всех $a, b \in G$. Все такие гомоморфизмы образуют группу. «Главные скрещенные гомоморфизмы», т. е. кограницы, — это $k_\alpha a = \sigma_a \alpha - \alpha$, $a \in G$, для каждого α. Определяем тогда

$$H^1(G, K) = \frac{\{\text{скрещенные гомоморфизмы}\}}{\{\text{главные скрещенные гомоморфизмы}\}}. \tag{24}$$

В размерности два коциклы определяются как фактор-системы, введенные в равенстве (15), т. е. отображения θ: $G \times G \to K$, такие, что

$$\sigma_a\theta(b, c) + \theta(a, bc) = \theta(ab, c) + \theta(a, b). \tag{25}$$

Все решения этого уравнения образуют группу. Тривиальные фактор-системы, удовлетворяющие $\theta_\phi(a, b) = \sigma_a\phi(b) - \phi(ab) + \phi(a)$, объявляются кограницами, и двумерная группа когомологии определяется согласно

$$H^2(G, K) = \frac{\{\theta : G \times G \to A\}}{\{\theta = \theta_\phi\}},$$

т. е. все решения уравнения фактор-системы (25) по модулю тривиальные решения. Это доказывает утверждение 1.

В общем случае мы определяем α_n: $G \times G \times \cdots \times G \to K$ и последовательность абелевых групп

$$C^n(G, K): \{\alpha_n(a_1 \ldots a_n),\ a_i \in G,\ \alpha_n \in K \mid \alpha_n = 0,$$
$$\text{если хотя бы одно } \alpha_i = 1\}$$

с гомоморфизмами (граничным оператором)

$$\begin{aligned}\delta_n[\alpha_n(a_1, \ldots, a_n)] &\equiv (\delta_n\alpha_n)(a_1, \ldots, a_{n+1}) \equiv \\ &\equiv a_1\alpha_n(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\alpha_n(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{n+1}) + \\ &+ (n-1)^{n+1}\alpha_n(a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

таким образом, что n-мерная группа когомологий $H^n(G, K)$ может быть определена, как выше.

Действительно, имеем немедленно $C^0(G, K) = K$, $(\delta_0\alpha_0)a = a\alpha_0 - \alpha_0$. Пусть $\sigma_a K = aK = aC^0 \cdot \operatorname{Ker}\delta_0 = K^G$ есть фиксированная точка в K относительно G. В этом случае имеем $B^0 = 0$ по определению; следовательно, $H^0(G, K) = K^G$.

Если обратимся к δ_1 и δ_2, то найдем

$$\delta_1[\alpha_1(a)] \equiv (\delta_1\alpha_1)(a, b) = a\alpha_1(b) - \alpha_1(ab) + \alpha_1(a), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\delta_2[\alpha_2(a, b)] \equiv (\delta_2\alpha_2)(a, b, c) &= a\alpha_2(b, c) - \\ &- \alpha_2(ab, c) + \alpha_2(a, bc) - \alpha_2(a, b),\end{aligned} \tag{27}$$

т. е. это совпадает с данными выше определениями.

В качестве частного случая проблема фазовых представлений группы Ли G становится просто расширением группы G при помощи одномерной абелевой группы K (гл. 13), и имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (Баргманн). *Пусть G — связная односвязная группа Ли с тривиальной второй группой когомологий $H^2(G, K)$,*

где K — одномерная абелева группа. Тогда любое проективное представление G допускает подъем до представления G.

(Доказательство см. в [38, 764].)

Г. *Примеры: некоторые дальнейшие приложения расширений групп в физике*

1. Расширения группы U_1: $\{e^{i\theta}, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

Единственным внутренним автоморфизмом является тождественный автоморфизм, а единственным внешним автоморфизмом является $e^{i\theta} \to e^{-i\theta}$. Если представим U_1 через $e^{i\theta Q}$ (например, Q — оператор заряда), а автоморфизмы — через $\rho e^{i\theta Q}\rho^{-1} = e^{\pm i\theta Q}$, то

$$[\rho, Q] = 0, \quad \rho^2 = 1, \text{ для внутреннего автоморфизма,}$$

$$\{[\rho, Q]_+ = 0, \quad \rho^2 = 1, \text{ или}$$

$$[\rho, Q]_+ = 0, \quad \rho^2 = e^{i\pi Q} = (-1)^Q\} \text{ для внешних автоморфизмов.}$$

2. Расширение группы U_2.

Записывая $U_2 = (U_1 \otimes \mathrm{SU}(2))/C_2$, где C_2 имеет два элемента $(1, 1)$ и $(-1, -1)$, мы интерпретируем в сильных взаимодействиях SU (2) как группу изоспина, а U_1 — как гиперзаряд Y. Коммутационные соотношения изоспина с обычным электрическим зарядом Q равны

$$[I_3, Q] = 0, \quad [I_\pm, Q] = \pm I_\pm.$$

Следовательно, определяя $Y = Q - I_3$, мы имеем

$$[\boldsymbol{I}, Y] = 0,$$

и, таким образом, прямое произведение $U_1 \otimes \mathrm{SU}(2)$. Представлениями группы U_2 являются $D^I(u)\, e^{i\alpha Y}$ с обоими элементами C_2, представленными единицей. Таким образом, $D^I(-1)\, e^{i\pi Y} = 1$, или

$$(-1)^{2I} = (-1)^Y.$$

Это соотношение выполняется эмпирически для всех известных частиц.

Пусть теперь C — оператор зарядового сопряжения, который обращает собственные значения оператора Q. Мы можем расширить U_2 при помощи C, $C^2 = I$, или, что более удобно, при помощи $G = Ce^{i\pi I} = G$-четность. Получаем $[G, \boldsymbol{I}] = 0$. Это расширение соответствует автоморфизму $e^{i\alpha} \to e^{-i\alpha}$, откуда мы получаем (как в примере 1)

$$GY + YG = 0.$$

Оператор G есть не что иное, как оператор четности в изоспиновом пространстве, различающий аксиальные и полярные векторы или тензоры в изоспиновом пространстве.

3. Физически значимыми представлениями группы Галилея (в пространстве решений уравнения Шредингера) являются проективные унитарные представления универсальной накрывающей группы (гл. 13). Пусть $g = (b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, R)$ — элемент группы Галилея. Проективные представления удовлетворяют

$$U(g')\,U(g) = \omega(g', g)\,U(g'g),$$

а фактор-система $\omega(g', g)$ дается явно в виде

$$\omega(g', g) = \exp\left[\mathrm{i}\,\frac{m}{2}\,(\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v})) - \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) + b\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v})\right].$$

Эта процедура эквивалентна нахождению центрального расширения E группы Галилея G посредством одномерной абелевой группы $K \equiv R$. Эта 11-параметрическая группа E имеет оператор массы m в качестве одного из своих инвариантов и приводит к правилу суперотбора на массу, как было отмечено в гл. 13, § 4. Точной последовательностью в этом случае является

$$1 \to R_1 \to E \to G \to 1.$$

Группа Галилея G не удовлетворяет критерию Баргманна. Проективные унитарные представления группы G индуцируются унитарными представлениями не группы G, но ее расширения E.

§ 5. Пространственно-временные и внутренние симметрии

В гл. 1, § 7 мы рассмотрели возможное объединение пространственно-временных симметрий и внутренних симметрий фундаментальных частиц физики на алгебраическом уровне. Теоремы 1 и 2 дают ограничения на попытки объединить эти два типа симметрий в более широкую конечномерную алгебру Ли. В этом параграфе мы развиваем ту же проблему на групповом уровне. Следующие теорема, следствие и контрпримеры описывают полученные результаты и область действия. В заключение мы установим, как с физической точки зрения эта проблема решается на практике.

Теорема (Йост). *Пусть G — конечномерная связная группа Ли, содержащая группу Пуанкаре в качестве аналитической подгруппы. Пусть U — непрерывное унитарное представление G и P_μ — вектор энергии-импульса. Пусть спектр P_μ содержится в $\{0\} \cup V_+$, V_+ — конус будущего в пространстве Минковского M^4. Если оператор массы $M = (P_\mu P^\mu)^{1/2}$ имеет изолированное собственное значение $m_1 > 0$, то соответствующее собственное пространство H_1 инвариантно относительно G.*

Доказательство. Пусть спектральное разложение непрерывной абелевой группы трансляций есть

$$e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu} = \int e^{-\mathrm{i}a^\mu p_\mu}\,\mathrm{d}E(p). \qquad (1)$$