

§ 7. Упражнения

§ 1.1. Можно ли вывести общее пуанкаре-инвариантное волновое уравнение (1.17) из общего волнового уравнения (1.12)?

Указание: группа Пуанкаре не обладает иными конечномерными представлениями, кроме представлений $SL(2, C)$, поднятых до Π (см. пример 8.7.1).

§ 2.1. Выведите волновое уравнение для массивной частицы спина 1, воспользовавшись представлением $D^{(1, 0)} \oplus D^{(0, 1)}$ группы $SL(2, C)$.

Указание: следуйте выводу уравнения Дирака.

§ 2.2. «Группа Максвелла»: рассмотрите волновое уравнение частицы в фиксированном заданном внешнем поле, например уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eA_0 \right] \Psi$$

или уравнение Дирака

$$[\gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) - m] \Psi = 0.$$

Группы симметрии этих уравнений являются теперь всего лишь подгруппами группы Галилея или группы Пуанкаре соответственно (или подгруппой конформной группы, если либо m преобразуется, либо $m = 0$). В силу калибровочной инвариантности эта подгруппа задается теми преобразованиями, которые оставляют $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ инвариантным. В частности, определите группу симметрии для случая постоянного $F_{\mu\nu}$ и изучите индуцированные проективные представления этой группы (см. [28, 705, 732]). Если поля также преобразуются, мы снова получаем полную инвариантность. См. также следующее упражнение.

§ 3.1. Рассмотрите светоподобные решения уравнения Майораны.

§ 4.1. Изучите расширение пространственно-временной группы Π (группы Пуанкаре или группы Галилея) при помощи электромагнитной калибровочной группы K , т. е. абелевой группы всех вещественноненулевых функций из C^v или C^∞ на пространстве Минковского M^4 (см. [177] и цитированную там литературу).

§ 4.2. Покажите, что группа автоморфизмов группы Пуанкаре Π есть

$$\text{Aut } \Pi = \Pi \rtimes (C_2 \times C_2 \times D),$$

где D — мультиликативная группа вещественных чисел $\rho > 0$, появляющихся в $(a, \Lambda) \rightarrow (\rho a, \Lambda)$, а $C_2 \times C_2$ — группа, порожденная отражением пространства и времени. Что является группой автоморфизмов группы Галилея (сравните с упражнением 1.10.1.11)?