Приложение Б

Функциональный анализ

§ 1. Замкнутые, симметрические и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Мы начнем с некоторых основных свойств операторов в гильбертовом пространстве.

Оператор A с областью определения $D(A) \subset H$ называется *непрерывным* в точке u_0 ($u_0 \in D(A)$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\|u - u_0\| \leqslant \delta, \quad u \in D(A) \Rightarrow \|Au - Au_0\| < \varepsilon.$$

Оператор A называется *ограниченным*, если существует константа C, такая, что

$$\|Au\| \leqslant C\|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in D(A).$$

Ограниченный линейный оператор (равномерно) непрерывен. В самом деле,

$$\|Au - Au_0\| = \|A(u - u_0)\| \leqslant C\|u - u_0\|. \tag{1а}$$

Поэтому если $\|u - u_0\| \to 0$, то $\|Au - Au_0\| \to 0$, т. е. $Au \to Au_0$. Следовательно, если линейный оператор A непрерывен в точке u_0 (например, $u_0 = 0$), то A ограничен. Действительно, пусть $\|Au - Au_0\| < \varepsilon$ при $\|u - u_0\| < \delta(\varepsilon)$. Тогда, согласно линейности оператора A, $\|Av\| < \varepsilon$ при $\|v\| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Поскольку для каждого $w \in H$ имеем $\left\|\frac{w}{\|w\|}\delta(\varepsilon)\right\| = \delta(\varepsilon)$, то

$$\|Aw\| = \left\|A\frac{w}{\|w\|}\delta(\varepsilon)\right\|\frac{\|w\|}{\delta(\varepsilon)} < \varepsilon\frac{\|w\|}{\delta(\varepsilon)}. \tag{1б}$$

Положив $C = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$, получаем

$$\|Aw\| < C\|w\|$$

для каждого $w \in D(A)$. Поэтому A ограничен. Таким образом, мы видим, что для линейных операторов в гильбертовом пространстве непрерывность и ограниченность эквивалентны.

Оператор A называется *положительно определенным*, если

$$(Au, u) \geqslant m\|u\|^2$$

для некоторого $m > 0$ и всех $u \in D(A)$, и *положительным*, если $(Au, u) \geqslant 0$ для всех $u \in D(A)$. Оператор A называется *замкнутым*, если из

$$u_m \in D(A), \quad \lim u_m = u, \quad \lim Au_m = v$$

следует

$$u \in D(A), \quad v = Au.$$

Отметим существенную разницу между непрерывными и замкнутыми операторами: если A непрерывен, то существование предела

$$\lim_{n\to\infty} u_n \to u \in D(A)$$

предполагает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n$; с другой стороны, если A только замкнут, то из сходимости последовательности

$$u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots \in D(A) \tag{2}$$

не следует, что последовательность

$$Au_1, Au_2, \ldots, Au_m, \ldots \tag{3}$$

также сходится.

Если A не замкнут, то мы определяем *замыкание* $\overline{A}$ оператора A как оператор со следующими свойствами.

1° Область определения $D(\overline{A})$ оператора $\overline{A}$ состоит из всех векторов $u \in H$, для которых существует по крайней мере одна последовательность (2), порождающая сходящую последовательность (3).

2° Действие оператора $\overline{A}$ определяется равенством

$$\overline{A}u = \lim_{n\to\infty} Au_n, \quad u \in D(\overline{A}).$$

Из определения замыкания следует, что оператор A допускает замыкание $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда из соотношений

$$u_n \to 0, \quad Au_n \to v$$

следует, что $v = 0$.

Пусть A — линейный оператор в H (ограниченный или нет). Существуют пары $v, v' \in H$, такие, что равенство

$$(Au, v) = (u, v') \tag{4}$$

выполняется для каждого $u \in D(A)$. В самом деле, равенство (4) удовлетворяется по крайней мере для $v = v' = 0$. Кажется естественным положить $v' = A^*v$ и назвать оператор A^* оператором, *сопряженным* A. Однако это определение сопряженного оператора A^* будет иметь смысл только тогда, когда элемент v' однозначно определен элементом v. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D(A)$ плотно в H. Действительно, если $D(A)$ не плотно в H и $w \neq 0$ ортогонально к $D(A)$, то для каждого $u \in D(A)$ наряду с (4) имеем

$$(Au, v) = (u, v' + w),$$

т. е. символ A^*v не имеет смысла. Обратно, если $D(A)$ плотно в H и если для любого $u \in D(A)$

$$(Au, v) = (u, v_1'),$$
$$(Au, v) = (u, v_2'),$$

то для произвольного $u \in D(A)$ имеем

$$(u, v_1' - v_2') = 0,$$

что невозможно, если $v_1' \neq v_2'$. Следовательно, если $D(A)$ плотно в H, то оператор A имеет сопряженный оператор A^*. Область определения $D(A^*)$ оператора A^* — это множество всех $v \in H$, для которых существует $v' \in H$, удовлетворяющее (4) для произвольного $u \in D(A)$. Действие оператора A^* на $D(A^*)$ задается формулой

$$A^*v = v'. \tag{5}$$

Заметим, что $v \in D(A^*)$ тогда и только тогда, когда (Au, v) — линейный непрерывный функционал на $D(A)$. Сопряженный оператор A^* имеет ряд интересных свойств:

Лемма 1. 1° *Оператор A^* линеен.*

2° *Оператор A^* замкнут даже тогда, когда A не замкнут.*

3° *Если оператор A имеет замыкание $\bar{A}$, то $(\bar{A})^* = A^*$.*

Все эти свойства прямо следуют из определения сопряженного оператора A^*. Более того, можно доказать, что

$$A^{**} = \bar{A} \tag{6}$$

(см. [788], теорема 2.9).

Пусть A, B — операторы в H с $D(B) \supset D(A)$ и пусть

$$Bu = Au \quad \text{для} \quad u \in D(A);$$

тогда говорят, что оператор B является *расширением* оператора A, а A — *сужением* оператора B. Мы будем писать $B \supset A$. В частности, замыкание $\bar{A}$ является расширением оператора A. Заметим, что

$$A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*. \tag{7}$$

В самом деле, если $v \in D(B^*)$, то существует $v' \in H$, такое, что $(Bu, v) = (u, v')$ для всех $u \in D(B)$. Если $A \subset B$, то также $(Au, v) = (u, v')$ для всех $u \in D(B)$, поскольку $Au = Bu$. Следовательно, $v' \in D(A^*)$ и $A^*v = v' = B^*v$. Поэтому $A^* \supset B^*$.

Оператор A называют *симметрическим*, если $A^* \supset A$. Другими словами, плотно определенный оператор A симметричен, если

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{для всех} \quad u, v \in D(A). \tag{8}$$

Оператор A называют *самосопряженным*, если $A^* = A$. Поскольку A^* замкнут (см. лемму 1), то самосопряженный оператор замкнут.

Лемма 2. *Пусть A — линейный симметрический оператор и $D(A) = H$. Тогда*

1° $A^* = A$,

2° *A — ограниченный оператор.*

Доказательство. 1°. Поскольку $A^* \supset A$, то $D(A^*) \supset D(A) = H$. Поэтому $D(A^*) = H$ и, следовательно, $A^* = A$.

2°. Поскольку A симметричен, то мы имеем

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in H.$$

Пусть $u_n \to u_0$ и $Au_n \to v_0$. Для любого $v \in H$ имеем

$$(v_0, v) = \lim (Au_n, v) = \lim (u_n, Av) = (u_0, Av) = (Au_0, v).$$

Поэтому $Au_0 = v_0$, т. е. A непрерывен и, следовательно, ограничен.

Эта лемма показывает, что неограниченный самосопряженный оператор не может быть определен на всем гильбертовом пространстве H. Поэтому мы можем определить его только на некоторой плотной области в H. Выбор подходящей плотной области определения для неограниченного оператора — одна из наиболее трудных задач функционального анализа и, следовательно, также квантовой физики.

Рассмотрим теперь свойства симметрических операторов и самосопряженных расширений операторов. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Оператор A, имеющий симметрическое расширение $\tilde{A}$, сам симметричен. Каждое симметрическое расширение $\tilde{A}$ оператора A является сужением оператора A^*.*

Доказательство. По предположению $\tilde{A} \supset A$ и $\tilde{A} \subset \tilde{A}^*$. Поэтому, согласно (7), $\tilde{A}^* \subset A^*$ и, следовательно,

$$A \subset \tilde{A} \subset \tilde{A}^* \subset A^*. \tag{9}$$

Легко также проверить, используя определение замкнутого и симметрического оператора и свойства их областей определения, что замыкание $\bar{A}$ симметрического оператора A является симметрическим оператором, т. е.

$$(\bar{A})^* \supset \bar{A}. \tag{10}$$

Мы знаем, что только самосопряженные операторы являются подходящими кандидатами для физических наблюдаемых. С другой стороны, очень часто в квантовой физике появляются симметрические операторы. Поэтому возникает важный вопрос: когда симметрический оператор допускает самосопряженное расширение? Эта задача может быть решена с помощью понятия *индексов дефекта*.

Пусть A — линейный плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть A^* сопряжен A. Положим

$$D_+ = \{u \in D(A^*) : A^*u = iu\}, \quad D_- = \{u \in D(A^*) : A^*u = -iu\}. \quad (11)$$

Пространства D_+ и D_- называются пространствами положительного и отрицательного дефектов оператора A соответственно. Их размерности (конечные или бесконечные числа), обозначаемые через n_+ и n_- соответственно, называются *индексами дефекта оператора* A.

Теорема 4. *Пусть A — симметрический оператор. Тогда*

1° A имеет самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$;

2° если $n_+ = n_- = 0$, то единственным самосопряженным расширением оператора A является его замыкание $\overline{A} = A^*$.

Эта теорема полностью решает задачу существования самосопряженных расширений симметрического оператора.

Заметим, что с заданным физическим симметрическим оператором можно сопоставлять много самосопряженных расширений и, следовательно, много физических наблюдаемых. Очевидно, что выбор подходящего представителя для физической наблюдаемой — это физическая задача. В самом деле, различные самосопряженные расширения могут иметь (в одном и том же пространстве H) различные собственные значения и различные полные множества ортогональных собственных функций. Например, рассмотрим оператор $d_\theta = i^{-1}d/d\varphi$ в $L^2(0, 2\pi)$, собственные функции u которого

$$d_\theta u = \lambda u \quad (12)$$

удовлетворяют граничному условию

$$u(2\pi) = \theta u(0), \quad \theta = \exp(i\omega), \quad \omega = \text{const} \in R. \quad (13$$

Решение имеет вид

$$u_n(\varphi) = \exp\left[i\left(n + \frac{\omega}{2\pi}\right)\varphi\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \quad (14)$$

Поэтому собственными значениями оператора d_θ являются числа $\lambda_n = n + \omega/2\pi$. Из спектральной теоремы следует, что каждое множество функций (14) при фиксированном θ $\{u_n\}$ образует полное ортонормированное множество функций в $L^2(0, 2\pi)$. Заметим, что в квантовой механике, исходя из требования однозначности волновой функции, мы выбираем расширение d_θ с $\theta = 1$. Это требование, однако, не универсально, так как, например, для полуцелых спинов мы допускаем двузначные волновые функции и некоторые авторы даже рассматривают бесконечнозначные волновые функции.