§ 2. Интегрирование векторных и операторных функций

Пусть $u(t)$ — функция, определенная на интервале $[a, b] \subset \subset R$, со значениями в гильбертовом пространстве H. Интеграл Римана функции $u(t)$ определяется таким же образом, как и интеграл Римана обычных функций.

Подразбиение Δ^i интервала $[a, b]$ — это система n_i точек

$$a = t_0^{(i)} < t_{n_1}^{(i)} < \cdots < t_{n_i}^{(i)} = b. \tag{1}$$

Последовательность $\{\Delta^i\}$ подразбиений называют нормальной, если

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant n_i} \left|t_k^{(i)} - t_{k+1}^{(i)}\right| = 0. \tag{2}$$

Положим

$$S\left(u(t), \Delta^i, t_k^i\right) = \sum_{k=1}^{n} u(t_k)\left(t_k^{(i)} - t_{k-1}^{(i)}\right), \tag{3}$$

где t_k — произвольная точка, удовлетворяющая неравенствам $t_{k-1}^{(i)} \leqslant t_k \leqslant t_k^{(i)}$. Если предел

$$\lim_{t\to\infty} S\left(u(t), \Delta^i, t_k^i\right) \tag{4}$$

существует для произвольной нормальной последовательности подразбиений и для произвольного выбора точек t_k, то этот предел называется *интегралом Римана* функции $u(t)$ и обозначается через

$$\int_{[a, b]} u(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Как и в случае обычных функций можно показать, что этот предел не зависит от выбора нормальных последовательностей подразбиений и от выбора свойств точек t_k.

Интеграл Римана (5) векторной функции $u(t)$ имеет все свойства римановых интегралов от обычных функций. В частности, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Если векторная функция $u(t)$ в H непрерывна на интервале $[a, b] \subset R$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Ограниченный интервал $[a, b]$ в R компактен. Мы знаем, что непрерывное отображение $t \to u(t)$ компактного множества равномерно непрерывно. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta. \tag{6}$$

Возьмем подразбиение Δ^i интервала $[a, b]$ с диаметром, меньшим δ. Для каждого Δ^l, $l > i$, такого, что Δ^i— подразбиение для Δ^l, из (6) имеем

$$S(u(t), \Delta^l, \tau_k^l) - S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n_l} u(\tau_k)(\tau_k^{(l)} - \tau_{k-1}^{(l)}) - \sum_{k=1}^{n_i} u(t_k)(t_k^{(i)} - t_{k-1}^{(i)}) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n_l} (u(\tau_k) - u(t_k')(\tau_k^{(l)} - \tau_{k-1}^{(l)})) \right\| \leqslant |b-a|\varepsilon,$$

где $|\tau_k - \tau_k'| < \delta$. Следовательно, для любых подразбиений Δ^l, Δ^s, l, $s > i$, таких, что Δ^i — подразбиение для Δ^l и Δ^s, имеем

$$\|S(u(t), \Delta^l, t_k^l) - S(u(t), \Delta^s, \tau_k^s)\| \leqslant \|S(u(t), \Delta^l, \tau_k^l) -$$

$$- S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| + \|S(u(t), \Delta^s, \tau_k^s) - S(u(t), \Delta^i, t_k^i)\| \leqslant 2|b-a|\varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\Delta^i \to S(u(t), \Delta^i, \tau_k^i)$ является последовательностью Коши. Полнота H предполагает существование элемента v в H, такого, что

$$\lim_{i\to\infty} S(u(t), \Delta^i, \tau_k^i) = v.$$

Лемма 2. *Интеграл Римана векторной функции $u(t)$, $t \in [a, b] \subset R$, имеет следующие свойства:*

1° *Линейность: если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ интегрируемы на $[a, b]$, то для α, $\beta \in R$ векторная функция $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ интегрируема и*

$$\int_{[a,b]} (\alpha u_1(t) + \beta u_2(t))\,dt = \alpha \int_{[a,b]} u_1(t)\,dt + \beta \int_{[a,b]} u_2(t)\,dt. \tag{7}$$

2° *Если $u(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\|u(t)\|$ интегрируема и*

$$\left\| \int_{[a,b]} u(t)\,dt \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|u(t)\|\,dt \leqslant C|a-b|, \tag{8}$$

где

$$C = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|.$$

3° *Если A — ограниченный линейный оператор в H и $u(t)$ интегрируема на $[a, b] \subset R^1$, то $Au(t)$ также интегрируема и*

$$\int_{[a,b]} Au(t)\,dt = A \int_{[a,b]} u(t)\,dt. \tag{9}$$

Доказательство. Свойство 1° следует прямо из определения интеграла Римана векторной функции. Первая часть (8) следует

также из определения интеграла. Вторая часть следует из того факта, что отображение $u \to \| u \|$ непрерывно. Поэтому числовая непрерывная функция $\| u(t) \|$ ограничена на ограниченном интервале $[a, b]$.

3°. Ограниченный линейный оператор непрерывен согласно (1.1а). Поэтому, согласно (4) и (3), мы имеем

$$A \int\limits_{[a, b]} u(t)\,\mathrm{d}t = A \lim_{i \to \infty} S(u(t), \Delta^{(i)}, t_k) = \lim_{i \to \infty} S(Au(t), \Delta^{(i)}, t_k) =$$

$$= \int\limits_{[a, b]} Au(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Замечание. Пусть D — замкнутая ограниченная область в R^n и $u(t)$, $t \in D$, — вектор-функция на D со значениями в H. Тогда, так же как в случае обычных функций, легко проверить, что все предыдущие результаты остаются справедливыми для $u(t)$, $t \in D$. В частности,

$$\left\| \int\limits_D u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int\limits_D \| u(t) \|\,\mathrm{d}t \leqslant CV_D, \tag{11}$$

где $C = \sup\limits_{t \in D} \| u(t) \|$ и V_D — объем области D.

Пусть A_t — сильно непрерывная операторная функция в замкнутой ограниченной области $D \subset R^n$. По определению вектор-функция $u(t) = A_t u$ непрерывна для любых u из H. Положим

$$\widetilde{A}u = \int\limits_D A_t u\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Ясно, что оператор $\widetilde{A}$ линеен. Он также ограничен. В самом деле, поскольку отображение Φ: $A \to \| A \|$ непрерывно, числовая функция $\| A_t \|$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D. Следовательно, $\sup\limits_{t \in D} \| A_t \| = C < \infty$. Поэтому

$$\| \widetilde{A}u \| \leqslant \int\limits_D \| A_t u \|\,\mathrm{d}t \leqslant \| u \| \int\limits_D \| A_t \|\,\mathrm{d}t \leqslant CV_D \| u \|. \tag{13}$$

Ограниченный линейный оператор $\widetilde{A}$ называется *интегралом* операторной функции A_t по области D. Мы обозначаем его следующим образом:

$$\widetilde{A} = \int\limits_D A_t\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Из формулы (12) для любого u из H имеем

$$\left(\int\limits_D A_t\,\mathrm{d}t \right) u = \int\limits_D A_t u\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Более того, согласно (13),

$$\left\| \int_D A_t \, dt \right\| \leqslant C V_D. \tag{16}$$

Если B — ограниченный оператор, то, согласно (9), мы имеем

$$B \int A_t \, dt = \int B A_t \, dt. \tag{17}$$

Подобным образом можно определить несобственные интегралы по неограниченным областям векторного пространства.

Пример. Пусть $G = SO(2)$ и $H = L^2(G)$. Пусть T — правое регулярное представление группы G в H, т. е. $T_x u(\varphi) = u(\varphi + x)$. Операторная функция

$$A_t = \frac{1}{2\pi} \exp(-imt) T_t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad m \in Z, \tag{18}$$

непрерывна, поскольку T непрерывно. Поэтому интеграл

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt) T_t \, dt \tag{19}$$

определен. Действие оператора $\widetilde{A}$ на любой элемент $u(\varphi)$ из H дает m-ю компоненту Фурье функции u. В самом деле,

$$\widetilde{A}u = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt) T_t u(\varphi) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_G \exp(-imt) u(\varphi + t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp(im\varphi) \int_G \exp(-im\psi) u(\psi) \, d\psi = \exp(im\varphi) \widehat{u}(m).$$

Аналогично все проективные операторы

$$P_{ij}^{\lambda} = \frac{\dim T^{\lambda}}{\operatorname{vol} G} \int_G \overline{D}_{ij}^{\lambda}(x) T_x \, dx,$$

рассмотренные в гл. 7, § 3, являются интегралами по G непрерывных операторных функций вида

$$A_x = \overline{D}_{ij}^{\lambda}(x) T_x,$$

где $x \in G$, а $D_{ij}^{\lambda}(x)$ — матричные элементы неприводимого представления T^{λ} группы G, которые непрерывны на G. Если $G = R^1$, то операторная функция

$$A_t = \exp(-i\lambda t) T_t \tag{20}$$

все еще непрерывна на G. Однако интеграл

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda t) T_t \, dx \tag{21}$$

не дает оператора в H, поскольку числовая функция $\alpha(t) = \|A_t\| = 1$ не интегрируема на вещественной прямой. В действительности величина (21) представляет собой операторнозначное распределение (см. гл. 15, § 4).

Заметим однако, что неограниченность пути интегрирования не является препятствием для построения интегрируемых операторных функций. В самом деле, операторная функция

$$A_t = \exp(-t^2) T_t$$

непрерывна и $\alpha(t) = \|A_t\| = \exp(-t^2)$. Поэтому интеграл

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) T_t \, dt \tag{22}$$

определен. Аналитические векторы для представлений групп строятся с помощью операторов вида (22) (гл. 11, § 4).

§ 3. Спектральная теория операторов

А. *Спектральная теорема*

Теория спектрального разложения самосопряженных операторов развита главным образом Гильбертом и фон Нейманом. Она дает очень полезный инструмент для разработки теории представлений групп и алгебр Ли.

Пусть $[a, b]$ — конечный или бесконечный интервал вещественной прямой R. Операторная функция E_λ, $\lambda \in [a, b]$, называется *разложением единицы* (или спектральной функцией), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad E(\lambda)^* = E(\lambda). \\ &2^\circ \quad E(\lambda) E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)). \\ &3^\circ \quad E(\lambda + 0) = E(\lambda). \\ &4^\circ \quad E(-\infty) = 0, \quad E(\infty) = I. \end{aligned} \tag{1}$$

Условия 1° и 2° означают, что $E(\lambda)$, $\lambda \in [a, b]$, — ограниченные эрмитовы операторы ортогонального проектирования (гл. 7, § 3). Для интервала $\Delta = [\lambda_1, \lambda_2] \subset [a, b]$ разность $E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$ будет обозначаться через $E(\Delta)$. Если Δ_1 и Δ_2 — два таких интервала, то по условию 2° мы имеем

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2). \tag{2}$$

В частности, если Δ_1 и Δ_2 не имеют общих точек, то

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = 0, \tag{3}$$

т. е. подпространства $H_1 = E(\Delta_1)H$ и $H_2 = E(\Delta_2)H$ ортогональны.