ГЛАВА I

Первые понятия топологии

Цель данной главы — подготовить читателя к систематическому изучению разделов топологии, излагаемых в следующих главах. Здесь дается доступный широкому кругу читателей обзор проблем, исследование которых привело к формированию топологии как математической дисциплины, ее интенсивному развитию в настоящее время, включая некоторые приложения в современной физике.

§ 1. Что такое топология?

Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, приводили меня к Analysis situs.

А. Пуанкаре

1. Топология как наука сформировалась, по общему мнению, в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре в конце XIX в. Первые наблюдения топологического характера восходят к Л. Эйлеру и К. Гауссу. Начало топологических исследований можно отнести к работам Б. Римана (середина XIX в.). В его исследованиях по теории функций были развиты новые методы, основывающиеся на геометрических представлениях. Им была сделана попытка сформулировать понятие многомерного многообразия и ввести высшие порядки связности. Эти понятия были уточнены Э. Бетти (1871). Но только А. Пуанкаре, исходя из потребностей теории функций и дифференциальных уравнений, ввел целый ряд важнейших топологических понятий, развил содержательную теорию и применил ее к исследованиям в различных разделах математики и механики. Его идеи и поставленные им проблемы до сих пор существенно влияют на развитие топологии и ее приложений.

А. Пуанкаре так определял содержание Analysis situs * (как тогда называли топологию): «Analysis situs есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур

* Analysis situs — геометрия положения (перевод с латинского), этот термин как название дисциплины ввел Б. Риман; термин «топология» (от греч. τόπος — место, λόγος — закон) ввел И. Б. Листинг (1847).

не только в обычном пространстве, но также и в пространстве более трех измерений. Analysis situs в трех измерениях является для нас познанием почти интуитивным; напротив, Analysis situs в более чем трех измерениях представляет громадные трудности, и чтобы начать пытаться их преодолевать, нужно быть очень убежденным в крайней важности этой науки. Если эта важность не всеми понята, то это потому, что об этом недостаточно размышляли» [61, т. III, с. 633].

Чтобы уяснить, что понимается под качественными свойствами геометрических фигур, представим себе сферу в виде резиновой оболочки и разрешим сжимать и растягивать ее любым способом без разрывов и не «склеивающим» различные ее точки в одну. Такие преобразования сферы называются *гомеоморфизмами*, а различные фигуры, получающиеся при гомеоморфизмах, — *гомеоморфными* между собой. Так вот, качественные свойства сферы — это свойства, общие всем гомеоморфным ей фигурам, или, как говорят, сохраняющиеся при гомеоморфизмах.

Очевидно, можно говорить о гомеоморфизмах и качественных свойствах и других фигур. Качественные свойства принято также называть *топологическими*. В данном примере очевидно такое топологическое свойство сферы, как ее целостность (связность). Более глубокие свойства обнаружатся при попытке установить гомеоморфизм сферы, например, с кругом (или с шаром). Легко прийти к убеждению, что такой гомеоморфизм невозможен. Однако чтобы доказать это, необходимо указать различные топологические свойства для сферы и круга (шара). Такими свойствами являются «стягиваемость» круга (шара) в одну из своих точек посредством «плавного» его изменения, сжатия по радиусам к центру и «нестягиваемость» сферы по себе ни к одной из своих точек. Полезно обратить внимание и на топологическое различие между волейбольной и велосипедной камерами. Эти интуитивные представления нуждаются в строгом обосновании.

Упражнение 1°. Исходя из наглядных представлений убедитесь, что: а) круговое кольцо не гомеоморфно кругу; б) число «дыр» в геометрической фигуре является ее топологическим свойством.

Исследования Пуанкаре дали начало одному из направлений в топологии — комбинаторной, или алгебраической, топологии. Ее метод заключается в сопоставлении геометрическим фигурам по некоторому, общему для всех фигур, правилу алгебраических объектов (групп, колец и т. п.) так, что определенным отношениям между фигурами соответствуют алгебраические отношения между объектами. Изучение свойств алгебраических объектов проливает свет на свойства геометрических фигур. Алгебраические объекты, построенные А. Пуанкаре, суть группы гомологий и фундаментальная группа.

Развитие метода алгебраической топологии неизбежно привело к объединению с теоретико-множественными идеями (Г. Кантор — конец XIX в.; Ф. Хаусдорф — первое десятилетие XX в.). Действительно, исследование качественных свойств множеств в пространствах любого числа измерений в дальнейшем вылилось в понятие топологического пространства — фундаментальное понятие, пронизывающее всю математику. Оно связано не только с рассмотрением геометрических фигур в конечномерных пространствах: развитие теории функции действительного переменного и функционального анализа привело к построению функциональных пространств, которые, как правило, бесконечномерны.

«Первые достаточно общие определения топологического пространства даны в работах М. Р. Фреше, Ф. Рисса и Ф. Хаусдорфа. Окончательно определение топологического пространства было сформулировано польским математиком К. Куратовским и П. С. Александровым» [28].

Топологические пространства и их непрерывные отображения, изучение их общих свойств составили содержание одного из разделов топологии, известного под названием «общая топология».

Объединение алгебраического и теоретико-множественного направлений в топологии осуществилось в работах Л. Э. Брауэра при изучении понятия размерности пространства (1908—1912) и в дальнейшем получило существенное развитие в трудах Дж. У. Александера, С. Лефшеца, П. С. Александрова, П. С. Урысона, Х. Хопфа, Л. А. Люстерника, Л. Г. Шнирельмана, М. Морса, А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина, А. Н. Колмогорова, Э. Чеха и др. Работы советских математиков составляют глубокий и обширный вклад в развитие всей топологии в целом.

Дать точное описание достигнутых результатов (и даже постановок задач) невозможно без знакомства с началами общей и алгебраической топологии. Здесь мы дадим лишь определенное представление о некоторых задачах, стимулировавших топологические исследования.

Если S^1 — окружность на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, то множество $\mathbb{R}^2 \backslash S^1$ распадается на два взаимно дополнительных открытых множества: внутренность A и внешность B по отношению к S^1. Окружность S^1 играет роль перегородки между A и B. Можно ли провести непрерывный простой путь из произвольной точки $a \in A$ в произвольную точку $b \in B$ так, чтобы он не пересекал перегородку S^1? (*Простым непрерывным путем* называют гомеоморфное отображение отрезка $[0, 1]$ числовой оси в плоскость.) Ответ отрицателен. Действительно, если $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x, y плоскости $\mathbb{R}^2$ и $\gamma(t)$ — такой путь, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, то функция $f(t) = \rho(\gamma(t), 0)$, где 0 — центр окружности, непрерывна и $f(0) < r$, $f(1) > r$, где r — радиус окружности S^1. По свойству непрерывных функций $f(t)$ принимает значение r в некоторой точке t_0, следовательно, $\gamma(t_0) \in S^1$.

Заменим теперь окружность S^1 ее гомеоморфным образом Γ (такая кривая называется *простой замкнутой*). Возникает вопрос: разбивается ли множество $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ на непересекающиеся открытые множества, границей каждого из которых является Γ? Ответ утвердительный (теорема Жордана), но доказательство уже использует тонкие топологические понятия. При этом кривая Г так же, как и S^1, обладает свойством перегородки, разделяющей два открытых множества.

Задача еще более усложнится, если вместо простой замкнутой кривой рассмотреть гомеоморфный образ n-мерной сферы, лежащий в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Обобщение теоремы Жордана на этот случай было дано Л. Э. Брауэром в 1911—1913 гг. Глубокое обобщение этого результата привело к созданию теорем двойственности (Дж. У. Александер, Л. С. Понтрягин, П. С. Александров и др.), долгое время определявших развитие алгебраической топологии.

Другая важная задача — обобщение понятия размерности. Размерность евклидова пространства хорошо известна как алгебраическое понятие. Является ли оно топологическим свойством, т. е. будут ли гомеоморфные евклидовы пространства иметь одинаковую размерность? Положительный ответ был дан А. Лебегом (1911).

Что же касается геометрических фигур, лежащих в евклидовых пространствах, то следовало первоначально сформулировать для них понятие *размерности*. Идея такого определения была высказана еще А. Пуанкаре. Размерность пустого множества полагается равной -1, и далее по индукции: если мы уже знаем, что такое размерность до $n-1$, то размерность n некоторого множества A ($\dim A = n$) означает, что его можно разбить на сколь угодно мелкие части множеством размерности $n-1$ и нельзя этого сделать множеством размерности $n-2$. Эти идеи получили уточнение и развитие в работах Л. Э. Брауэра, К. Менгера, П. С. Урысона, П. С. Александрова и др.

Еще одно важное направление в топологии, тесно связанное с приложениями, — теория неподвижных точек. Уже в алгебре и началах анализа мы встречаемся с вопросом существования решений уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — многочлен или более сложная функция. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$f(x) + x = x, \tag{2}$$

или (обозначив $F(x) = f(x) + x$) уравнению

$$F(x) = x. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) называются *неподвижными точками отображения* F. Если уравнение (1) векторное, т. е. представляет собой систему из n уравнений с n неизвестными, $n > 1$, то эквивалентное уравнение (3) тоже векторное и, следовательно, неподвижные точки лежат в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Чрезвычайно важной задачей является отыскание достаточно общих и эффективных признаков существования неподвижных точек.

Л. Э. Брауэром получен замечательный результат, находящий широчайшие приложения в современных исследованиях. Он формулируется удивительно просто: всякое непрерывное отображение выпуклого ограниченного замкнутого множества в себя имеет неподвижную точку. Выпуклое множество может рассматриваться как в трехмерном, так и в многомерном евклидовом пространстве. Например, непрерывное отображение в себя замкнутого (т. е. рассматриваемого вместе с границей) круга в плоскости или шара в пространстве обязательно имеет неподвижную точку.

Упражнение 2°. Покажите, что аналог теоремы Брауэра для кругового кольца неверен.

Теорема Брауэра получила дальнейшее развитие в работах Х. Хопфа, С. Лефшеца и др. Она получила обобщение и на случай отображений функциональных пространств (О. Д. Келлог, Дж. Д. Биркгоф, Ю. П. Шаудер, Ж. Лере), что расширило область ее приложений. Следует отметить, что еще А. Пуанкаре интересовался теоремами существования неподвижных точек, сводя к ним некоторые задачи небесной механики.

2. Подчеркнем, что задачи, описанные выше, далеко не составляют всей проблематики топологии. Приведем другие примеры. В работах Б. Римана впервые было введено понятие *n-мерного многообразия* как пространства, в котором точки обладают n числовыми координатами, определенными, по крайней мере, на достаточно малых участках пространства. В современной математике различают топологические и гладкие многообразия. Это связано с теми или иными возможностями согласования систем координат, заданных на отдельных участках многообразия. Участки многообразия могут пересекаться, и пересечения получают таким образом различные системы координат, при этом каждая система координат может быть выражена через другую непрерывным или гладким (дифференцируемым) преобразованием. В первом случае многообразие называют топологическим, во втором — гладким.

Являясь обобщением понятия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, понятие многообразия охватило целый ряд геометрических объектов, возникавших в классической механике, дифференциальных уравнениях, теории поверхностей. Пуанкаре придал окончательную форму понятию многообразия и развил начала анализа на таких пространствах.

В дальнейшем эти концепции получили развитие в теории гладких многообразий (Ж. де Рам, Л. С. Понтрягин, Х. Уитни и др.). Следуя методу алгебраической топологии, таким пространствам сопоставили новые алгебраические объекты — «кольца когомологий внешних дифференциальных форм». Сами гладкие многообразия также удалось «организовать» в «кольцо внутренних гомологий» (В. А. Рохлин, начало 50-х годов). Алгебраические объекты иного типа — *гомотопические группы* π_n, $n > 1$, топологического пространства — были введены в 30-х годах В. Гуревичем; они явились глубоким обобщением понятия *фундаментальной группы* π_1 А. Пуанкаре. Группы π_n — «важнейшие инварианты, играющие фундаментальную роль в построении топологии» [51, с. 25]. Проблема их вычисления геометрическими методами занимала важное место в топологии (Л. С. Понтрягин, Г. Ф. Фрейденталь, В. А. Рохлин, 30-е—начало 50-х годов). С конца 20-х годов разносторонне исследуются *группы гомологий* H^n, $n \geqslant 0$, топологических пространств (формально-алгебраическое определение которых предложено Э. Нётер). Определяется «двойственная» по отношению к гомологиям теория «когомологий» (А. Н. Колмогоров, Дж. У. Александер, середина 30-х годов). Накопление различных алгебраических объектов в топологии привело к выделению и развитию «гомологической алгебры». В 30—40-е годы нашего столетия возникла из дифференциальной геометрии и развилась в самостоятельное направление теория *расслоенных пространств* (расслоений). Расслоенное пространство можно представить как непрерывную совокупность пространств — слоев, гомеоморфных друг другу и «занумерованных» точками другого пространства — базы расслоения. Простейший пример — совокупность нормалей или касательных плоскостей к двумерной поверхности в евклидовом пространстве (базе расслоения). Однако в общем случае и слои, и база расслоения могут быть устроены значительно сложнее. Проблема классификации расслоений, построения их инвариантов («характеристических классов») была решена в работах Л. С. Понтрягина, X. Уитни, Э. Штифеля, Чжень Шень Шеня.

3. В послевоенный период произошла существенная перестройка топологии. К началу 50-х годов был накоплен богатый запас результатов в области алгебраической топологии. Назрела задача выработки единого взгляда на все многообразие полученных фактов, создания новых общих методов. Такая перестройка топологии шла под общим влиянием французской топологической школы (Ж. Лере, Р. Том, А. Картан, Ж.-П. Серр и др.).

Развитие топологии с 50-х годов шло бурными темпами и в чрезвычайно большом числе направлений. В этом развитии активное участие принимали советские математики. Перечислим некоторые наиболее крупные направления, следуя обзору [51].

В этот период в центре внимания топологов по-прежнему находятся гладкие многообразия и расслоенные пространства и их отображения. Развивается теория гомотопий, когомологических операций, спектральной последовательности расслоений; интенсивно развивается теория характеристических классов и кобордизмов; исследуются геометрическая и гомотопическая структуры гладких многообразий; развиваются теория категорий и функторов, общие вопросы теории гомологий; интенсивно развиваются K-теория и тесно связанная с ней теория индекса эллиптических операторов; развивается теория слоений, теория конечных и компактных групп преобразований, вычисляются когомологии алгебр Ли векторных полей; продолжает активно развиваться направление «общая топология».

Ряд важнейших достижений этого периода связан с именами таких математиков, как Ж. Лере, Ж.-П. Серр, Р. Ботт, Ф. Хирцебрух, Р. Том, Дж. Ф. Адамс, М. Атья, Дж. Милнор, С. П. Новиков, М. М. Постников.

В частности, развитие топологии привело к решению ряда стоявших перед топологами крупных проблем: создание Ж. Лере фундаментального алгебраического метода вычисления гомологических групп с помощью спектральной последовательности; полное решение М. М. Постниковым проблемы определения гомотопического типа пространств; исследование числа «гладких структур» на данном топологическом многообразии (т. е. способов превратить его в гладкое многообразие; отметим эффектный результат Дж. Милнора о существовании на семимерной сфере S^7 двадцати восьми гладких структур); доказательство С. П. Новиковым «топологической инвариантности» классов Понтрягина. Исследована проблема триангуляции гладких многообразий, т. е. возможности их разбиения на правильно примыкающие *симплексы*. Фигуры, составленные из симплексов (так называемые полиэдры), рассматривал еще А. Пуанкаре при построении теории гомологий. Напомним, что симплекс — это выпуклая оболочка линейно независимых точек в евклидовом пространстве или ее гомеоморфный образ; указанные точки называются вершинами симплекса, а уменьшенное на единицу их число — размерностью симплекса. Всякое подмножество вершин симплекса также определяет симплекс — грань исходного симплекса; правильное примыкание симплексов в полиэдре означает, что симплексы могут пересекаться только по их общей грани. Один из принципиальных вопросов классической топологии: допускают ли два гомеоморфных полиэдра размерности n «одинаковые», с комбинаторной точки зрения, триангуляции? Эта так называемая «основная проблема комбинаторной топологии» была решена для размерности $n \leqslant 3$ Е. Е. Мойсом, а для старших размерностей она решается, вообще говоря, отрицательно (случай $n = 4$ удалось исследовать лишь в 80-е годы — М. Фридман, С. Дональдсон); С. П. Новиков, Р. Керби, Л. Зибенман исследовали возможное число неэквивалентных триангуляций многообразия.

4. Назовем еще ряд крупных достижений в самой топологии и ее приложениях: классификация многомерных ($n \geqslant 5$) многообразий (С. П. Новиков, Ч. Уолл, У. Браудер); вычисление числа и классификация линейно независимых векторных полей на сферах (Дж. Ф. Адамс); доказательство А. В. Чернавским локальной стягиваемости группы непрерывных гомеоморфизмов топологического замкнутого компактного многообразия M^n (или пространства $\mathbb{R}^n$); доказательство усилиями ряда топологов — А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва, Г. Г. Каспарова — высказанной С. П. Новиковым «гипотезы о высших сигнатурах» в случае произвольных многообразий и дискретных подгрупп групп Ли; топологическое решение проблемы вычисления индекса эллиптических операторов (М. Атья, И. Зингер); общее решение А. Т. Фоменко проблемы существования минимальных поверхностей в классе бордизмов и др. (мы привели далеко не полный список полученных топологами к настоящему времени важных результатов). Подробности развития топологии читатель может найти в цитировавшейся выше «Истории отечественной математики» [28], а также в фундаментальном обзоре [51]. Отметим одну важную черту современного этапа развития топологии — широчайшее проникновение ее методов во многие разделы современной математики: вариационное исчисление в целом, геометрию в целом, топологию групп Ли и однородных пространств, топологию комплексных и алгебраических многообразий, качественную (топологическую) теорию динамических систем и слоений, топологические методы в гамильтоновой механике, топологию эллиптических и гиперболических уравнений с частными производными; проникновение методов топологии в классический анализ привело к возникновению новой математической теории — теории особенностей, которую В. И. Арнольд (один из создателей этой теории, как и Р. Том) охарактеризовал как «грандиозное обобщение исследования функций на максимум и минимум» [8]; с 60-х годов развивается «глобальный анализ» — топология бесконечномерных многообразий и их отображений, — смыкающийся с вариационным исчислением в целом и с классическим нелинейным функциональным анализом (точнее, с той его топологической частью, которая связана с теорией критических значений Морса—Смейла и топологией фредгольмовых отображений).

К настоящему времени топология стала мощным инструментом математического исследования, а ее язык приобрел универсальное значение.

Замечательным фактом является возникновение в 70—80-е годы XX века комплекса приложений топологии в современной физике — факт, значимый не только для физики, но и для самой топологии. «В ряде случаев без топологических понятий оказалось невозможным понять суть реальных физических явлений... Топология нашла себе ряд блестящих применений в самых разнообразных задачах для описания качественных, устойчивых свойств различных математических и физических объектов...» [51, с. 6—7].

Естественно отметить и обратное влияние физических проблем на развитие топологии. Академик С. П. Новиков, энергично пропагандирующий взаимосвязи топологии и физики и активно участвующий в развитии этого направления, выступая на открытии международной конференции по топологии и ее приложениям (СССР, 1987 г.), подчеркнул, что наиболее важные идеи за последние 10 лет пришли в топологию из внешнего мира, и выразил уверенность, что в XXI веке топология станет необходимым инструментом приложений к анализу, с которым должен быть знаком каждый.

§ 2. Обобщение понятий пространства и функции

1. Метрическое пространство. Как уже говорилось, в топологии выработано существенно более широкое понятие пространства, чем евклидово. Вначале мы сделаем первый шаг и рассмотрим понятие метрического пространства (менее общее, чем понятие топо-