может найти в цитировавшейся выше «Истории отечественной математики» [28], а также в фундаментальном обзоре [51]. Отметим одну важную черту современного этапа развития топологии — широчайшее проникновение ее методов во многие разделы современной математики: вариационное исчисление в целом, геометрию в целом, топологию групп Ли и однородных пространств, топологию комплексных и алгебраических многообразий, качественную (топологическую) теорию динамических систем и слоений, топологические методы в гамильтоновой механике, топологию эллиптических и гиперболических уравнений с частными производными; проникновение методов топологии в классический анализ привело к возникновению новой математической теории — теории особенностей, которую В. И. Арнольд (один из создателей этой теории, как и Р. Том) охарактеризовал как «грандиозное обобщение исследования функций на максимум и минимум» [8]; с 60-х годов развивается «глобальный анализ» — топология бесконечномерных многообразий и их отображений, — смыкающийся с вариационным исчислением в целом и с классическим нелинейным функциональным анализом (точнее, с той его топологической частью, которая связана с теорией критических значений Морса—Смейла и топологией фредгольмовых отображений).

К настоящему времени топология стала мощным инструментом математического исследования, а ее язык приобрел универсальное значение.

Замечательным фактом является возникновение в 70—80-е годы XX века комплекса приложений топологии в современной физике — факт, значимый не только для физики, но и для самой топологии. «В ряде случаев без топологических понятий оказалось невозможным понять суть реальных физических явлений... Топология нашла себе ряд блестящих применений в самых разнообразных задачах для описания качественных, устойчивых свойств различных математических и физических объектов...» [51, с. 6—7].

Естественно отметить и обратное влияние физических проблем на развитие топологии. Академик С. П. Новиков, энергично пропагандирующий взаимосвязи топологии и физики и активно участвующий в развитии этого направления, выступая на открытии международной конференции по топологии и ее приложениям (СССР, 1987 г.), подчеркнул, что наиболее важные идеи за последние 10 лет пришли в топологию из внешнего мира, и выразил уверенность, что в XXI веке топология станет необходимым инструментом приложений к анализу, с которым должен быть знаком каждый.

§ 2. Обобщение понятий пространства и функции

1. Метрическое пространство. Как уже говорилось, в топологии выработано существенно более широкое понятие пространства, чем евклидово. Вначале мы сделаем первый шаг и рассмотрим понятие метрического пространства (менее общее, чем понятие топологического пространства). Это вызвано как большей простотой, так и широким использованием этого понятия в современной математике.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ для каждой пары его точек $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ определено расстояние

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{3} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}.$$

При изучении $\mathbb{R}^3$ существенно используются следующие свойства расстояния:

I. $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых x, y.

II. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

III. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

IV. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ (неравенство треугольника).

На $\mathbb{R}^3$ могут существовать и другие вещественные функции от пары точек x, y , удовлетворяющие свойствам I—IV.

Упражнение 1°. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3) — координаты точек $x, y \in \mathbb{R}^3$. Покажите, что функция $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} |\xi_i - \eta_i|$ удовлетворяет свойствам I—IV.

Такие функции могут существовать также и на множествах иной природы.

Упражнение 2°. Пусть X — произвольное множество. Положим $\rho(x, y) = 0$, если x и y — совпадающие элементы в X, и $\rho(x, y) = 1$ в противном случае. Покажите, что такая функция ρ удовлетворяет свойствам I—IV.

Функции ρ из упражнений 1° и 2° естественно назвать *расстояниями между элементами* соответствующих множеств.

Чтобы ввести общее понятие расстояния, напомним определение произведения двух множеств. Если X и Y — два множества, то их произведением $X \times Y$ называют множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. В частности, определено произведение $X \times X$.

Определение 1. Множество X вместе с отображением ρ: $X \times X \to \mathbb{R}^1$ (в числовую ось), сопоставляющим каждой паре $(x, y) \in X \times Y$ вещественное число $\rho(x, y)$ и удовлетворяющим свойствам I—IV, называется *метрическим пространством* и обозначается (X, ρ).

Отображение ρ называют *расстоянием* или *метрикой пространства* X. Элементы множества X называют обычно точками.

Всякое множество можно превратить в метрическое пространство, наделив его метрикой, описанной в упражнении 2°. Такое метрическое пространство называется *дискретным*. Однако такой способ «метризации» малосодержателен.

Пример 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — подмножество евклидова пространства. Расстояние в $\mathbb{R}^3$ в то же время может служить расстоянием в X. Метрика в X получается в этом случае сужением метрики в $\mathbb{R}^3$. ◆

Если (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество, то $(Y, \bar{\rho})$ — также метрическое пространство, где $\bar{\rho}$: $Y \times Y \to \mathbb{R}^1$ — сужение отображения ρ на подмножество $Y \times Y$.

Говорят, что метрика в Y *индуцируется* (является наследственной) метрикой из X, а Y называют *подпространством метрического пространства* X.

Ряд примеров метрических пространств естественно возникает в задачах анализа.

Пример 2. Рассмотрим множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Его обычно обозначают $C_{[0, 1]}$. Если $x(t)$, $y(t)$ — две непрерывные функции из $C_{[0, 1]}$, то положим

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|. \qquad (1)$$

Упражнение 3°. Проверьте, что функция (1) является метрикой. ◆

Множество $C_{[0, 1]}$ с описанной выше метрикой называется *пространством непрерывных функций*; оно играет важную роль в анализе.

Упражнение 4°. Пусть A — произвольное множество, X — множество ограниченных вещественных функций на A. Если f: $A \to \mathbb{R}^1$, g: $A \to \mathbb{R}^1$ — произвольные элементы X, то положим

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|.$$

Покажите, что ρ — метрика в X.

Упражнение 5°. Пусть p — простое число. Если $n > 0$ — целое и в разложении на простые множители содержит степень p^α, то положим $v_p(n) = \alpha$. Распространим функцию v_p с множества целых положительных чисел на множество $\mathbb{Q} \setminus 0$ рациональных чисел без нуля формулой $v_p(\pm r/s) = v_p(r) - v_p(s)$. Положим

$$\rho(x, y) = p^{-v_p(x-y)}, \qquad x \neq y,$$
$$\rho(x, x) = 0$$

для произвольных x, y из $\mathbb{Q}$. Покажите, что функция $\rho(x, y)$ определена корректно и является метрикой в $\mathbb{Q}$ (p-адическое расстояние).

2. Сходящиеся последовательности и непрерывные отображения. В метрическом пространстве (X, ρ) естественно вводятся понятия, обобщающие начальные понятия математического анализа.

Отображение $n \mapsto x_n$ множества натуральных чисел в метрическое пространство (X, ρ) называется *последовательностью точек* этого пространства и обозначается $\{x_n\}$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке a (имеет предел a), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $n_0(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

Этот факт часто записывают так:

$$x_n \xrightarrow{\rho} a, \text{ или, проще, } x_n \to a.$$

Упражнение 6°. Пусть $\left\{x_n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n\right)\right\}$ — последовательность точек трехмерного евклидова пространства; пусть ρ — евклидова материка. Докажите, что $x_n \xrightarrow{\rho} a$ тогда и только тогда, когда $\xi_i^n \to \xi_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$ при $n \to \infty$, где $a = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$.

Рассматривая последовательность непрерывных функций $x_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, как последовательность в метрическом пространстве $C_{[0, 1]}$, можно говорить о сходимости этой последовательности к элементу $x_0 = x_0(t)$: $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Такая сходимость часто называется *равномерной* на отрезке $[0, 1]$.

Упражнение 7°. Покажите, что последовательность функций $x_n(t) = n^2te^{-nt}$ на отрезке $[0, 1]$ сходится к нулевой функции поточечно (т. е. при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$), но не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Определим понятие непрерывного отображения метрического пространства (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2).

Определение 2. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества X в множество Y. Если для всякой точки $x_0 \in X$ и всякой последовательности $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0$ в X последовательность образов в Y сходится к $f(x_0)$: $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$, то отображение f называется *непрерывным отображением метрического пространства* (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2).

Очевидно, что это определение является обобщением понятия непрерывной числовой функции; оно охватывает широкий класс отображений геометрических фигур в евклидовых пространствах.

Если свойство непрерывности, выраженное определением 2, рассмотреть в фиксированной точке x_0, то получим определение непрерывного отображения в точке x_0.

Упражнение 8°. Пусть S^2 — сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Положим $f(x) = -x$ (центральная симметрия). Докажите, что f непрерывно.

Упражнение 9°. Приведите пример непрерывного отображения плоского квадрата в себя, имеющего неподвижные точки только на границе.

Очевидно, эквивалентное определение непрерывного отображения метрических пространств можно дать и на языке ε, δ:

отображение $f\colon X \to Y$ *непрерывно*, если для любого $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, что $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, x_0) < \delta$.

Если в этом определении δ не зависит от выбора точки x_0, то отображение f называется *равномерно непрерывным*.

Упражнение 10°. Пусть $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Докажите, что отображение $F\colon C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, где $F(x(t)) = f(x(t))$, непрерывно.

Напомним, что отображение множеств $f\colon X \to Y$ называется *сюрьективным*, если каждый элемент из Y является образом некоторого элемента из X; *инъективным*, если различные элементы из X отображаются в различные элементы из Y; *биективным*, если отображение сюрьективно и инъективно одновременно.

Теперь мы подошли к определению гомеоморфизма метрических пространств.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *гомеоморфизмом*, а пространства X, Y — *гомеоморфными*, если 1) f биективно, 2) f непрерывно, 3) обратное отображение f^{-1} непрерывно.

Это определение уточняет то представление о гомеоморфных фигурах, которое на интуитивном уровне обсуждалось в § 1. Таким образом, получает твердую почву и понятие о топологических свойствах фигур; *топологическими свойствами метрических пространств* называются такие свойства, которые сохраняются при гомеоморфизмах. Гомеоморфные метрические пространства называют *топологически эквивалентными*.

Упражнение 11°. Докажите, что: 1) кольцо в $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно цилиндру в $\mathbb{R}^3$; 2) кольцо без края (внутренность кольца) гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ без точки, S^2 без двух точек.

Упражнение 12°. Докажите, что отображение полуинтервала $[0, 1)$ на окружность в комплексной плоскости, задаваемое функцией $z = e^{i2\pi t}$, $0 \leqslant t < 1$, не является гомеоморфизмом (метрика в комплексной плоскости задается формулой $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$).

Упражнение 13°. Докажите, что: 1) замкнутые шар и куб в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфны; 2) сфера S^2 с выколотой точкой N (пространство $S^2 \setminus N$, где N — северный полюс сферы) гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2$. (Используйте стереографическую проекцию.)

Если отображение $f\colon X \to Y$ является гомеоморфизмом на свой образ $f(X)$, рассматриваемый как подпространство в Y, то f называют *вложением пространства X в Y*.

Если $X \subset Y$, то имеется естественное вложение X в Y: $f(x) = x$.