

§ 3. От метрического пространства к топологическому (наглядный материал)

1. Метод «склейки». Обсудим идею введения более общего понятия пространства, чем метрическое, — понятия топологического пространства — и дадим первоначальное представление о таких пространствах. Сначала опишем прием построения новых пространств, который сразу выводит нас за рамки метрических пространств.

Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство (можно для наглядности представлять себе X как некоторое подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^3). Пусть X разбито на непересекающиеся подмножества A_α :

$$X = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}; \quad A_{\alpha} \cap A_{\beta} = \emptyset, \quad \text{если } \alpha \neq \beta.$$

Если все точки из X , попадающие в какое-нибудь A_α , назвать эквивалентными и затем «склеить» в одну точку $* a_\alpha$, то получится новое множество $Y = \bigcup_{\alpha} a_\alpha$. Оно называется *фактормножеством* по

данной эквивалентности. Заметим, что Y не является подмножеством X , следовательно, к «пространству» Y метрика ρ , вообще говоря, не имеет никакого отношения.

Путем склейки можно получить ряд известных поверхностей в евклидовом пространстве. Рассмотрим некоторые из них. Пусть

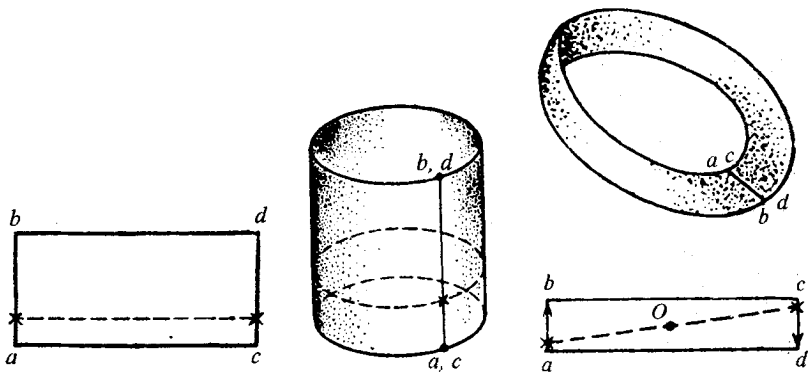


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

X — прямоугольник (рис. 1). Если «склеить» те точки на сторонах ab и cd , которые лежат на общей горизонтали, то получим фактормножество, которое можно отождествить с цилиндром (рис. 2).

* Строго это означает, что каждое множество A_α эквивалентных точек из X рассматривается как один элемент нового множества.

Если «склеить» точки, диаметрально противоположные относительно центра O прямоугольника, лежащие на сторонах ab и dc , то получим «лист Мёбиуса» (рис. 3).

Можно изготовить модель листа Мёбиуса из листа бумаги, склеив противоположные стороны соответствующим образом. Эта модель наглядно демонстрирует ряд свойств листа Мёбиуса.

Лист Мёбиуса имеет ряд замечательных свойств: у него один край — замкнутая линия $adbca$, в противоположность цилиндру он имеет одну сторону, так как его можно закрасить непрерывным движением кисти в один цвет, не переходя через край (эти свойства

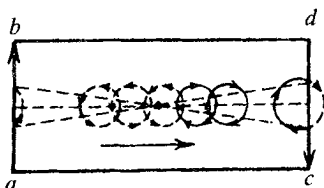


Рис. 4

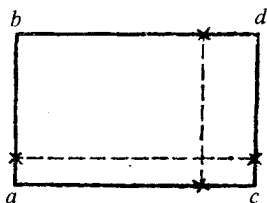


Рис. 5

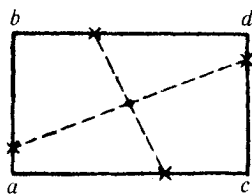


Рис. 6

легко наблюдать на бумажной модели). Лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность. Напомним, что поверхность ориентируема, если любой достаточно малый кружок на поверхности с фиксированным направлением обхода его границы при любом «плавном» перемещении по поверхности в случае возвращения в исходное положение сохранит первоначальное направление обхода границы (предполагается, что кружок не пересекал край поверхности); в противном случае поверхность неориентируема. Неориентируемость листа Мёбиуса ясна из рис. 4.

Если на листе $abcd$ привести склейку сторон ab и cd по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку сторон bd и ac по точкам, лежащим на общей вертикали, то получится поверхность, называемая *тором* (рис. 5).

Если же склеить стороны ab и cd равно как и bd и ac , по диаметрально противоположным точкам относительно центра (рис. 6), то фактормножество не удастся реализовать в виде фигуры в трехмерном евклидовом пространстве. Точнее, такая попытка склеить эквивалентные точки привела бы к поверхности, которая должна пронизывать сама себя без самопересечений. Мы могли бы поместить эту поверхность в \mathbb{R}^3 , только разорвав ее на части подходящим образом,

но это нарушило бы молчаливо подразумеваемый принцип «непрерывности» склейки (точки, близкие к эквивалентным точкам, при склейке переходят в близкие точки). Полученное фактормножество называется *проективной плоскостью*, его обозначают $\mathbb{R}P^2$.

Заметим, что прямоугольник $abcd$ гомеоморфен кругу с границей $abcd$, и проективную плоскость можно описать иначе как круг (рис. 7), у которого склеены диаметрально противоположные точки его границы, или, наконец, как полусферу, диаметрально противоположные точки края которой склеены в одну (рис. 8).

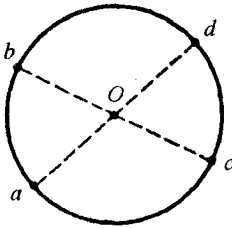


Рис. 7

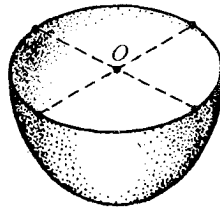


Рис. 8

Таким образом, операция образования фактормножества в первых трех из рассмотренных случаев приводит снова к фигурам в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , а в последнем случае дает новый объект, не реализуемый в \mathbb{R}^3 .

Упражнения. 1°. Проверьте, что цилиндр, тор, сфера — ориентируемые поверхности, а проективная плоскость неориентируема.

2°. Подходящими склейками (факторизациями) получите окружность из отрезка, сферу из круга, окружность из \mathbb{R}^1 , тор из \mathbb{R}^2 .

2. О понятии топологического пространства. Поясним теперь, как возникает идея топологического пространства. Выше уже отмечалось, что всегда фактормножество естественным образом можно расположить в метрическом пространстве и, следовательно, индуцировать в нем метрику. Одна из функций метрики — характеризовать степень близости двух точек; в определении непрерывного отображения метрика играет именно такую роль (сравните с § 2). Можно геометризовать понятие близости, введя в рассмотрение шары

$$D_r(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) < r\}, \quad r > 0,$$

с центром в точке x_0 радиуса r ; тогда точка x ε -близка к точке x_0 , если $x \in D_\varepsilon(x_0)$.

Легко проверить, что непрерывность отображения $f: X \rightarrow Y$ двух метрических пространств можно охарактеризовать следующим эквивалентным способом так: пусть $x_0 \in X$ — произвольная (фиксированная) точка и $y_0 = f(x_0)$ — элемент Y ; тогда для всякого шара $D_\varepsilon(y_0)$ найдется такой шар $D_\delta(x_0)$, что $f(D_\delta(x_0)) \subset D_\varepsilon(y_0)$.

Можно сказать, что свойство непрерывности отображения выражается в сохранении близости точек. Понятие близости позволяет точно сформулировать интуитивно данное нам понятие окрестности точки: часть Ω метрического пространства является окрестностью своей точки x_0 , если каждая точка, достаточно близкая к x_0 , принадлежит Ω . Таким образом, в метрических пространствах появляются структуры окрестностей.

«Однако так определенные пространства обладают большим числом свойств, которые можно сформулировать независимо от лежащего в их основе понятия расстояния. Например, каждое подмножество, содержащее окрестность точки x_0 , также есть окрестность точки x_0 ; пересечение двух окрестностей точки является окрестностью точки x_0 . Эти и некоторые другие свойства влекут массу следствий, которые выводятся из них совершенно независимо от понятия «расстояние», первоначально легшего в основу определения окрестностей. Так получают предложения, в которых совсем нет речи о величине, расстоянии и т. п.» [15, с. 12].

Если в множестве X не введено расстояние, то понятие близости лишается точного смысла и данное выше определение окрестности непригодно. Однако плодотворным оказывается обратный процесс: для каждого элемента $x_0 \in X$ задать в множестве X некоторую систему подмножеств $\{\Omega(x_0)\}$ так, чтобы выполнялись основные свойства (аксиомы), объявить их системой окрестностей и назвать элементы из окрестности $\Omega(x_0)$ Ω -близкими к x_0 . Говорят в этом случае, что множество X наделено *топологической структурой*, или топологией, и называют его *топологическим пространством*, а элементы X называют точками.

«Как только топологические структуры определены, понятию непрерывности легко уже придать точный смысл. Интуитивно функция непрерывна в некоторой точке, если ее значение сколь угодно мало изменяется, покуда аргумент остается достаточно близким к рассматриваемой точке. Мы видим, что понятие непрерывности будем иметь точный смысл каждый раз, когда пространство аргументов и пространство значений функции будут топологическими пространствами» [15, с. 14].

Таким образом, заменяя шары в определении непрерывного отображения окрестностями, получаем понятие непрерывного отображения, а затем и понятие гомеоморфизма топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства называются *топологически эквивалентными*.

Пример. Пусть \mathbb{C} — комплексная плоскость. Расширенная плоскость комплексного переменного $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ является топологическим пространством: шаровые окрестности точек $z \in \mathbb{C}$ и окрестности точки ∞ вида

$$D_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > r\} \cup \infty,$$

а также подмножества, содержащие их, задают топологическую структуру на $\bar{\mathbb{C}}$.

Упражнение 3°. Установите гомеоморфизм расширенной плоскости комплексного переменного и сферы S^2 так, чтобы северный полюс N был образом точки ∞ , а южный полюс — точки 0 .

У к а з а н и е. Используйте стереографическую проекцию $S^2 \setminus N$ на экваториальную плоскость \mathbb{C}

$$u = \frac{x + iy}{1 - z}, \quad (x, y, z) \in S^2 \setminus N.$$

В метрическом пространстве топологическая структура факторного множества возникает естественным образом из топологической структуры метрического пространства путем склеивания окрестностей. Таким образом, факторное множество становится топологическим пространством (*факторпространством*).

3. Склейка двумерных поверхностей. Изучим подробнее факторпространства, получающиеся при склейке плоских фигур. Рассмотрим многоугольник Π в плоскости \mathbb{R}^2 и индуцируем в нем метрику из \mathbb{R}^2 . Очевидно, шаровые окрестности точки $x \in \Pi$ состоят из пересечений с Π открытых кругов с центром в точке x . Таким образом, достаточно малые шаровые окрестности точки x — открытые круги, если x не лежит на границе многоугольника, и секторы открытого круга (вместе с ограничивающими радиусами), если x лежит на границе (рис. 9).

Пусть имеются два многоугольника, Π и Π' ; отметим две их стороны, a и a' . Можно склеить Π и Π' по этим сторонам, задав гомеоморфизм $\alpha: a \rightarrow a'$ и объявив эквивалентными образ и прообраз. То-

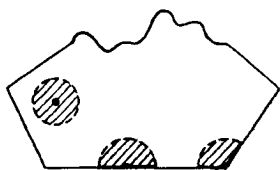


Рис. 9

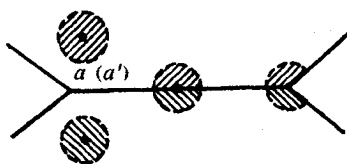


Рис. 10

пология факторпространства $(\Pi \cup \Pi')/R$ по этой эквивалентности состоит из открытых кругов для внутренних точек $x \in \Pi$, $x' \in \Pi'$, из склеившихся секторов для эквивалентных точек $x \in a$, $x' \in a'$ и из множеств, содержащих названные окрестности. Рис. 10 иллюстрирует случай, когда отождествление выполняется соединением многоугольников по равным сторонам a, a' .

Аналогичным образом можно склеивать две стороны одного многоугольника (см. примеры п. 1).

Упражнения. 4°. Опишите топологии цилиндра, тора, листа Мёбиуса, проективной плоскости.

5°. Проверьте, что приведенные выше (п. 1) примеры факторпространств гомеоморфны их реализациям в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Проверьте, что разные модели (рис. 6, 7, 8) проективной плоскости гомеоморфны.

Перейдем к склеиваниям поверхностей. Склеим в пятиугольнике, изображенном на рис. 11, стороны, обозначенные одинаковыми буквами. Стрелки указывают закон склеивания соответствующих

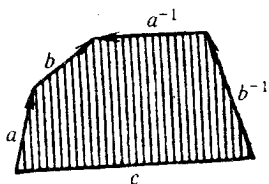


Рис. 11

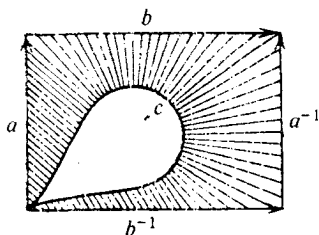


Рис. 12

сторон (начало ориентированного отрезка склеивается с началом другого, конец — с концом). Показатель -1 при буквенном обозначении некоторых сторон напоминает о несовпадении для этих сторон направления, задаваемого стрелками, с направлением, задаваемым обходом многоугольника по часовой стрелке. Удобное описание схемы склейки можно получить, записывая последовательно обозначения сторон в «слово», обходя многоугольник по часовой стрелке. Например, если начинать со стороны a , то схема склейки будет $aba^{-1}b^{-1}c$. Такая схема характеризует склейку, так как полностью определяет в многоугольнике склеиваемые стороны и закон склеивания. Нетрудно убедиться, что это факторпространство можно получить и другим топологически эквивалентным способом (рис. 12); здесь факторпространство представляет тор с вырезом по кривой c (рис. 13, где штриховыми линиями обозначены линии склейки aa^{-1} и bb^{-1}). Тор с дырой называется *ручкой*.

Рассмотрим склейку соседних сторон треугольника. Если ориентации противоположны, т. е. схема склейки $aa^{-1}c$ (рис. 14), то факторпространство топологически эквивалентно сфере с дырой (рис. 15).

Рассмотрим склейку соседних сторон с одинаковой ориентацией, т. е. по схеме aac (рис. 16). Этот треугольник представим как результат склейки двух прямоугольных треугольников по общей высоте d (рис. 17) с указанной ориентацией. Поменяем порядок склейки этих треугольников: сначала отождествим гипотенузы a , а затем катеты d (рис. 18). Получится лист Мёбиуса (ср. с рис. 3), причем последнее факторпространство гомеоморфно исходному (рис. 16).

Теперь, вырезав в сфере S^2 кружок, можно к сфере с дырой приклеить либо ручку, либо лист Мёбиуса по свободному краю c ; по-

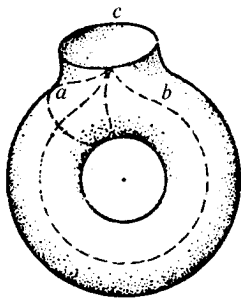


Рис. 13

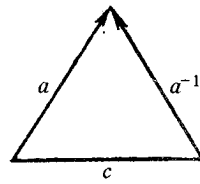


Рис. 14

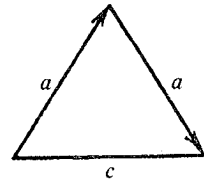
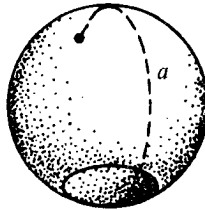
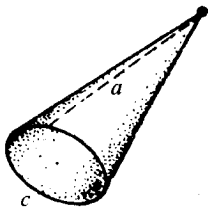


Рис. 15

Рис. 16

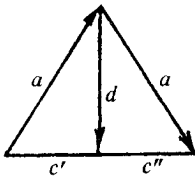


Рис. 17

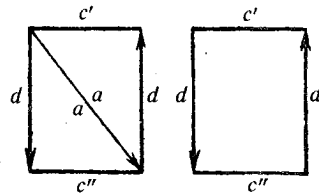


Рис. 18

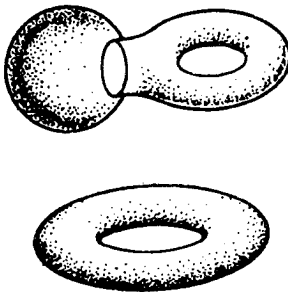


Рис. 19

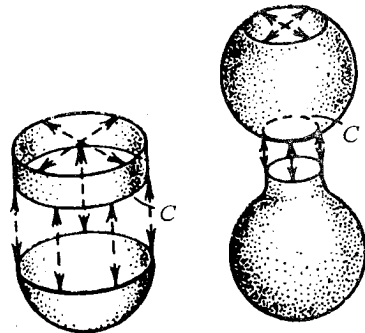


Рис. 20

следний можно представлять как окружность S^1 (граница вырезанного кружка). В первом случае получаем тор (рис. 19) (убедитесь в топологической эквивалентности фигур на рисунке). Во втором — проективную плоскость RP^2 . Убедимся в этом.

Проективная плоскость (см. рис. 8) топологически эквивалентна факторпространству, изображенному на рис. 20. Действительно,

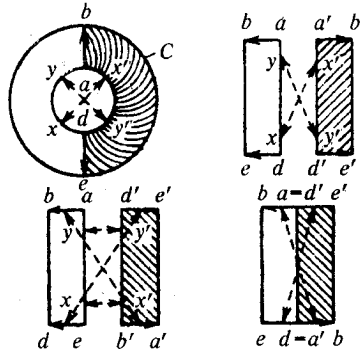


Рис. 21

остается показать, что верхний «колпачок» (рис. 20) — лист Мёбиуса с краем c . Представив его как плоское кольцо с отождествлением диаметрально противоположных точек внутренней окружности, выполним топологические преобразования (рис. 21), приводящие к листу Мёбиуса.

Дальнейшие построения можно развивать в двух направлениях:

- 1) вырезать в сфере p кружков и приклеить к ним p ручек;
- 2) вырезать q кружков и приклеить q листов Мёбиуса.

Таким образом можно получить два ряда поверхностей

$$\begin{aligned} M_0, M_1, \dots, M_p, \dots, \\ N_0, N_1, \dots, N_q, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

(очевидно, M_0 и N_0 — это сфера S^2).

Обсудим свойства этих поверхностей. Прежде всего легко убедиться, что они получены из конечного числа выпуклых многоугольников склейкой их сторон и последующих топологических преобразований. Такие пространства будем называть *конечно-триангулируемыми*, а разбиение пространства на «криволинейные» многоугольники — *триангуляцией* *. Поверхности M_p, N_q связаны в том смысле, что состоят из единого «куска», не разбиваются на две непересекающиеся группы многоугольников. Это следует из того, что любые две вершины многоугольников триангуляции соединяет непрерывный путь, состоящий из сторон. Рассматриваемые

* Определение триангуляции поверхности дано в гл. II.

поверхности не имеют края, так как любая граничная сторона многоугольника склеена с другой (в точности с одной) стороной. Отсюда следует, что каждая точка такой поверхности имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу; такие пространства называются *двумерными многообразиями*.

Конечно-триангулируемые связные двумерные многообразия называются *замкнутыми поверхностями*. Если бы мы клеили не все пары сторон многоугольников, оставив некоторые стороны свободными, то получилась бы *незамкнутая поверхность* (или *поверхность с краем*). Точка на крае имеет окрестность, гомеоморфную полукругу. Пример — сфера S^2 с несколькими дырами.

Отметим также, что поверхности M_p ориентируемы и их можно поместить в \mathbb{R}^3 как двусторонние поверхности без самопересечений. Напротив, поверхности N_q неориентируемые (называемые односторонними по аналогии с листом Мёбиуса), не допускают вложения в \mathbb{R}^3 без самопересечений (но в \mathbb{R}^4 допускают!).

В гл. II будет доказано, что всякая замкнутая поверхность гомеоморфна какой-то поверхности типа M_p и N_q (числа p, q называются *родом поверхности*). Поверхности M_p и N_q , $q \geq 1$, никогда не гомеоморфны, так как ориентируемость поверхности — топологическое свойство. Две различные поверхности типов $M_p, M_{p'}$ (или $N_q, N_{q'}$) также не могут быть гомеоморфны (см. следующий пункт). Таким образом, список (1) дает полную топологическую классификацию замкнутых поверхностей. Если к сфере приклеить p ручек и $q \geq 1$ листов Мёбиуса (проделав $p + q$ дыр), то полученная поверхность будет топологически эквивалентной сфере, к которой приклеено $2p + q$ листов Мёбиуса.

Упражнения 6°. К сфере с двумя дырами приклейте цилиндр по его краям. Докажите, что полученная поверхность гомеоморфна сфере с приклеенной ручкой, т. е. тору.

7°. Покажите, что кольцо и лист Мёбиуса можно получить из круга приклеиванием к его границе прямоугольника по двум сторонам.

8°. Докажите эквивалентность следующих определений \mathbb{RP}^2 данным выше: 1) в S^2 отождествляются диаметрально противоположные пары точек; 2) в листе Мёбиуса край сжимается в одну точку; 3) край листа Мёбиуса заклеивается кругом по некоторому гомеоморфизму граничных окружностей.

9°. Определите \mathbb{RP}^1 , отождествляя диаметрально противоположные точки окружности S^1 . Покажите, что: 1) \mathbb{RP}^1 гомеоморфно окружности S^1 ; 2) $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$; 3) существует окрестность \mathbb{RP}^1 в \mathbb{RP}^2 , гомеоморфная листу Мёбиуса.

10°. Докажите эквивалентность следующих определений поверхности N_2 (бутылки Клейна): 1) прямоугольник (рис. 22), стороны которого склеены по схеме $aba^{-1}b$; 2) кольцо со склеенными окружностями края с обращением направления обхода (такую склейку

можно представить следующим образом: «перевернуть» внутреннюю окружность вокруг какого-либо диаметра, после чего склеить точки внутренней и внешней окружности, оказавшиеся на одном радиусе; на рис. 22 x , y — склеиваемые точки); 3) два листа Мёбиуса, склеенные по краю; 4) кольцо, к каждой окружности края которого приклеен лист Мёбиуса.

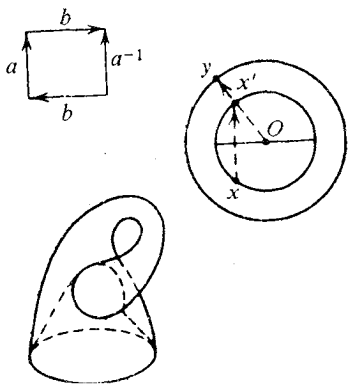


Рис. 22

Топологическое пространство, гомеоморфное выпуклому многоугольнику, будем называть *топологическим многоугольником*. Соответственно образы вершин (сторон) назовем *вершинами (ребрами)* топологического многоугольника. Без ограничения общности можно считать, что триангуляция поверхности состоит из топологических многоугольников, примыкающих друг к другу ребрами (чтобы этого добиться, нужно выпуклые многоугольники, отождествлением сторон которых получается поверхность, предварительно разбить на достаточно мелкие многоугольники, например

треугольники). Ниже рассматриваются только такие триангуляции.

Для всякой триангулированной поверхности Π определим число $\chi(\Pi) = e - k + f$, где e — число вершин, k — число ребер, f — число многоугольников триангуляции, называемое *характеристикой Эйлера поверхности* Π . Она обладает замечательным свойством — не зависит от триангуляции, т. е. является топологическим инвариантом поверхности.

Упражнение 11°. Убедитесь, что эйлера характеристика сферы S^2 равна 2, тора — 0, диска — 1, ручки — (-1) , листа Мёбиуса — 0.

Нетрудно доказать топологическую инвариантность характеристики Эйлера $\chi(S^2)$ для сферы S^2 , если воспользоваться теоремой Жордана*, которая утверждает: всякая простая замкнутая кривая, т. е. кривая, гомеоморфная окружности, разбивает сферу или плоскость на две непересекающиеся области, границей которых она является.

Итак, рассмотрим некоторую триангуляцию S^2 . К ней можно последовательно прийти, фиксируя вершину (*) и вычерчивая одно ребро за другим, первое ребро проводим из вершины (*) в новую вершину, а затем следим, чтобы каждое последующее ребро начиналось в вершине уже начерченных ребер. Будем подсчитывать на каждом шаге число возникших вершин e , число ребер k и число областей f , ограниченных замкнутой простой кривой из ребер. В начальной ситуации положим $e = 1$, $k = 0$, $f = 1$ (верши-

* Доказательство теоремы Жордана достаточно длинно, и мы его не приводим.

на (*) и дополнительная к ней область). Легко заметить, что число $e - k + f$ при добавлении нового ребра не меняется. Действительно, если ребро идет в новую вершину, то новых областей не появится, а числа e и k увеличатся на 1. Если новое ребро соединит две старые вершины, то оно замкнет некоторый путь из ребер и появится новая область (по теореме Жордана), так что k и f увеличатся на 1, а e не изменится. Начертив последнее ребро, мы восстановим триангуляцию полностью, и тогда $e - k + f = \chi(S^2)$; в начальной же ситуации $e - k + f = 2$. Следовательно, $\chi(S^2) = 2$.

Если Π_1, Π_2 — две поверхности с краями l_1, l_2 , гомеоморфными S^1 , то они могут быть склеены краями по гомеоморфизму $\alpha: l_1 \rightarrow l_2$. Пусть $\Pi_1 \cup_{\alpha} \Pi_2$ обозначает полученное факторпространство. Докажем формулу

$$\chi(\Pi_1 \cup_{\alpha} \Pi_2) = \chi(\Pi_1) + \chi(\Pi_2). \quad (2)$$

Триангулируем Π_1 и Π_2 так, чтобы на краях l_1, l_2 получились гомеоморфные триангуляции (из l вершин и такого же числа ребер — триангуляция S^1). После склейки числа вершин, ребер и многоугольников будут равны $e_1 + e_2 - l, k_1 + k_2 - l, f_1 + f_2$ соответственно. Формула (2) следует из равенства

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2 - l) - (k_1 + k_2 - l) + (f_1 + f_2) = \\ = (e_1 - k_1 + f_1) + (e_2 - k_2 + f_2). \end{aligned}$$

Формула (2) в некоторых случаях удобна для вычислений эйлеровой характеристики.

Пусть ${}_p S^2$ — сфера с p дырами. Если вклеить обратно p дисков, то получим S^2 . Формула (2) дает равенство $\chi(S^2) = \chi({}_p S^2) + p$, откуда $\chi({}_p S^2) = 2 - p$.

Поверхность M_p получается склеиванием ${}_p S^2$ с p ручками, эйлерова характеристика каждой из которых равна (-1) . Из (2) получаем $\chi(M_p) = 2 - 2p$. Аналогично получаем $\chi(N_{q_1}) = 2 - q_1$, так как эйлерова характеристика листа Мёбиуса равна нулю. Так как $\chi(M_{p_1}) = \chi(M_{p_2})$ только при $p_1 = p_2$ и $\chi(N_{q_1}) = \chi(N_{q_2})$ только при $q_1 = q_2$, то вследствие топологической инвариантности эйлеровой характеристики поверхности M_{p_1}, M_{p_2} при $p_1 \neq p_2$ не могут быть гомеоморфны, равно как и поверхности N_{q_1}, N_{q_2} при $q_1 \neq q_2$.

Интересные приложения эйлерова характеристика имеет в теории выпуклых многогранников. Можно представлять поверхность

выпуклого многогранника склеенной из конечного числа выпуклых многоугольников (его граней) по тождественным отображениям склеивающихся ребер. Сразу получаем формулу Эйлера для выпуклого многогранника:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

где α_0 — число вершин, α_1 — число ребер, α_2 — число граней многогранника. Действительно, слева — эйлерова характеристика поверхности многогранника, очевидно, гомеоморфной S^2 .

Если в каждой вершине сходятся m граней и каждая грань — выпуклый n -угольник, то говорят, что тип многогранника $\{n, m\}$.

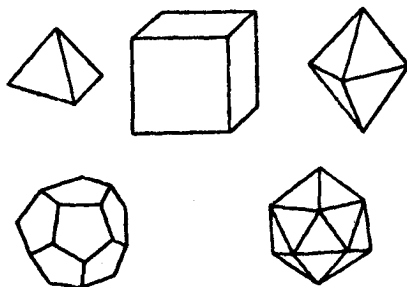


Рис. 23

Если n -угольники правильные, то многогранник называется правильным. Зная тип $\{n, m\}$, можно вычислить $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Действительно, в каждой вершине сходятся m ребер, поэтому $\alpha_0 m = 2\alpha_1$; в каждой грани — n ребер, отсюда $\alpha_2 n = 2\alpha_1$ (каждое ребро соединяет две вершины и входит в две грани). Таким образом,

$$\frac{\alpha_0}{m^{-1}} = \frac{\alpha_1}{2^{-1}} = \frac{\alpha_2}{n^{-1}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{4mn}{2n + 2m - mn},$$

откуда вычисляются значения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Естественное условие положительности $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ приводит к неравенству между целыми положительными n, m :

$$2n + 2m - mn > 0, \text{ откуда } (n - 2)(m - 2) < 4.$$

Легко видеть, что имеем всего пять решений:

$$\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}. \quad (3)$$

В элементарной геометрии известно пять видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (рис. 23), типы которых как раз совпадают с (3).

Таким образом, дана полная классификация многогранников типа $\{n, m\}$.