

§ 4. Понятие римановой поверхности

Один из путей, приводящих к основным топологическим понятиям, связан с изучением алгебраических функций и их интегралов; он был открыт Риманом еще в середине прошлого столетия.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_0(z)\omega^n + a_1(z)\omega^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0, \quad a_0(z) \neq 0, \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами, являющимися полиномами от комплексного переменного z ; его корни будут функциями $\omega = \omega(z)$ от z , при некоторых условиях — аналитическими. Например, если в точке z_0 все корни уравнения (1) различны, то в окрестности точки z_0 существуют n функций $\omega_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, аналитически зависящих от z .

Аналитическая функция $\omega = \omega(z)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется *алгебраической функцией*. Уравнение (1) определяет несколько ветвей $\omega_i(z)$ алгебраических функций, число которых, вообще говоря, меняется и которые переходят друг в друга при изменении z . Поэтому говорят о многозначной алгебраической функции $\omega(z)$, определяемой уравнением (1), и о ее ветвях $\omega_i(z)$. Риман выдвинул идею замены z -плоскости \mathbb{C} такой поверхностью, на которой функция $\omega(z)$ будет однозначной, а ее ветви $\omega_i(z)$ будут значениями $\omega(z)$ на отдельных участках поверхности (такие поверхности называются *римановыми поверхностями*).

Построить такую поверхность нетрудно. Будем рассматривать расширенную плоскость $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ комплексного переменного (z -сферу) и декартово произведение $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, состоящие из упорядоченных пар (z, ω) . Окрестности в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ естественно определить как декартовы произведения окрестностей (и все содержащие их множества). Тогда алгебраическое уравнение (1) определяет в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ подмножество — график многозначной алгебраической функции $\omega(z)$ над комплексной плоскостью \mathbb{C} , состоящий из тех пар $(z, \omega) \in \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, которые удовлетворяют уравнению (1). Это и есть риманова поверхность Π многозначной алгебраической функции $\omega(z)$: действительно, проекция $\Pi \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$, задаваемая по правилу

$$(z, \omega) \rightarrow \omega, \quad (2)$$

определяет однозначную функцию на римановой поверхности, принимающую значения всех ветвей многозначной функции. Интересен вопрос о строении поверхности Π и о распределении на ней ветвей функции ω . Для изучения таких вопросов полезно расширять график Π , присоединяя к Π некоторые «бесконечно удаленные» точки из $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$; полученное так расширение $\tilde{\Pi}$ множества Π называют полной римановой поверхностью.

Простейшая многозначная алгебраическая функция связана с уравнением второй степени

$$\omega^2 = a_1(z)\omega + a_2(z) = 0. \quad (3)$$

Замена переменных $v = 2\omega + a_1$ приводит это уравнение к более простому виду $v^2 - p(z) = 0$, где $p(z)$ — многочлен. Поэтому вместо уравнения (3) рассмотрим уравнение

$$\omega^2 - p(z) = 0. \quad (4)$$

Пусть $p(z) = z$. Тогда для алгебраического уравнения $\omega^2 - z = 0$ определена риманова поверхность — график Π_1 в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, на котором

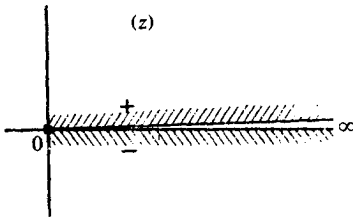


Рис. 24

функция ω однозначна. Присоединив к Π_1 точку (∞, ∞) , получим «расширение» $\tilde{\Pi}_1$ — полную риманову поверхность.

Покажем, что $\tilde{\Pi}_1$ гомеоморфна $\tilde{\mathbb{C}}$, т. е. двумерной сфере S^2 . Действительно, отображение (2)

$$\omega = \omega(t), \text{ где } t = (z, \omega) \cup \Pi_1,$$

с обратным отображением $t = (\omega^2, \omega)$ задает, как нетрудно проверить, гомеоморфизм $\tilde{\Pi}_1$ на ω -сферу S^2 . Дадим другую конструкцию римановой поверхности, используемую обычно в теории функций комплексного переменного. Уравнение (4) определяет двузначную алгебраическую функцию $\omega = \sqrt{z}$; если $z = re^{i\varphi}$, то два значения ее, $\omega_1 = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}$, $\omega_2 = -\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$, отличаются знаком и переходят друг в друга при движении точки z по замкнутому пути, обходящему точку $z = 0$. Чтобы предупредить переход ветви ω_1 в ветвь ω_2 , проведем разрез на z -сфере вдоль положительной вещественной полуоси (рис. 24). Этот разрез соединит точки 0 и ∞ . К разрезу примыкают два края (берега): (+) — верхний, (−) — нижний. Рассмотрим объединение (непересекающееся) двух листов (экземпля-

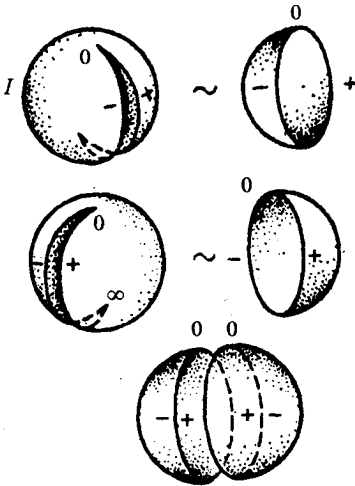


Рис. 25

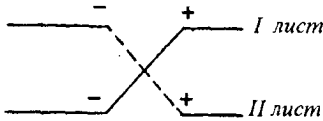
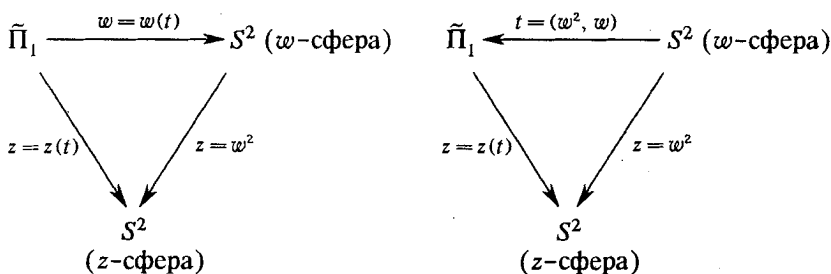


Рис. 26

ров), I и II, разрезанной z -сферы. Объявим лист I носителем ветви ω_1 , II — ветви ω_2 (полагая $\omega_i = \infty$ при $z = \infty$ на каждом листе I, II). На двулистной поверхности $I \cup II$ функция ω однозначна. Чтобы уловить эффект перехода ветви ω_1 в ветвь ω_2 , склеим (—) берег I листа с (+) берегом II листа и (+) берег I листа с (—) берегом II листа. Получим факторпространство Π'_1 , являющееся двулистной римановой поверхностью функции $\omega = \sqrt{z}$. Нетрудно усмотреть, что Π'_1 гомеоморфно сфере S^2 ; на рис. 25 показана склейка листов I и II после предварительного топологического преобразования их в полусферу путем раздвигания берегов, приводящая к сфере S^2 . Хотя Π'_1 и не лежит в \mathbb{R}^3 (листы I и II пронизывают друг друга, см. схему склейки, рис. 26), однако наглядно демонстрируется взаимосвязь ветвей ω_1 и ω_2 . Можно и непосредственно проверить, что отображение $\omega: \Pi'_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$, задаваемое многозначной функцией $\omega = \sqrt{z}$, также гомеоморфизм на ω -сферу S^2 . Итак, $\tilde{\Pi}_1$ и Π'_1 гомеоморфны между собой и гомеоморфны сфере S^2 .

Зададим проекцию $\tilde{\Pi}_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ формулой $z(t) = z$ и отождествим $\tilde{\mathbb{C}}$ с S^2 ; имеем диаграммы:



Эти диаграммы коммутативны, т. е. суперпозиция двух отображений (в направлении стрелок) равна третьему отображению (закрывающая стрелка). Горизонтальные отображения в диаграммах — взаимно обратные гомеоморфизмы.

Отображение $S^2 \xrightarrow{z=w^2} S^2$ называется *двулистным (разветвленным) накрытием* сферы S^2 с точками ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ (проверьте, что обход точки $z = \infty$ также приводит к изменению ветви).

Это накрытие поясняет идею подстановок, применяемых в анализе для рационализации подынтегральной функции в известных интегралах $\int R(z, \sqrt{z}) dz$, где $R(z, \omega)$ — рациональная функция двух переменных z, ω . Пусть R задана на некоторой области в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; рассмотрим интеграл

$$\int_{z_0}^z R(z, \sqrt{z}) dz = \int_{\gamma} R(z, \sqrt{z}) dz, \quad (5)$$

понимаемый как криволинейный интеграл по некоторому пути γ в z -плоскости \mathbb{C} , не пересекающему разрез 0∞ и соединяющему точки z_0, z , где \sqrt{z} — одна из ветвей многозначной алгебраической функции $w = \sqrt{z}$. Точка $t = (z, \sqrt{z})$ лежит на римановой поверхности Π_1 и пробегает путь $\tilde{\gamma} \subset \Pi_1$, когда z пробегает путь $\gamma \subset \mathbb{C}$. Подынтегральная функция в (5) задана на кривой $\tilde{\gamma}: R(z, \sqrt{z}) = R(t), t \in \tilde{\gamma}$. С помощью гомеоморфизма w -сферы и $\tilde{\Pi}_1: t = (w^2, w)$ найдем путь $\sim \tilde{\gamma}$ на w -сфере S^2 , гомеоморфный $\tilde{\gamma}$. Связь между z -сферой и w -сферой дается отображением $z = w^2$, что и позволяет преобразовать интеграл (5):

$$\int_{\tilde{\gamma}} R(z, \sqrt{z}) dz = \int_{\tilde{\gamma}} 2R(w^2, w)w dw = \int_{w_0}^{w_1} R(w^2, w)w dw,$$

где w_0 и w_1 — начало и конец пути $\tilde{\gamma}$ на w -плоскости \mathbb{C} . Последний интеграл — интеграл от рациональной функции.

Пусть теперь $p(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$, где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$, $a_0 \neq 0$. Обозначив через r_1 и r_2 корни многочлена $p(z)$, $r_1 \neq r_2$, получим алгебраическую функцию

$$w = \sqrt{a_0(z - r_1)(z - r_2)}. \quad (6)$$

Очевидно, она также двузначна. Исследование, аналогичное проведенному выше, показывает, что одна ветвь переходит в другую как при обходе точки r_1 , так и при обходе точки r_2 , а обход обеих точек (по замкнутому пути, окружающему точки r_1 и r_2), как и точки ∞ , не меняет значение ветви. Следовательно, риманова поверхность Π_2' рассматриваемой функции получится из двух экземпляров z -сферы, разрезанных вдоль отрезка $\overline{r_1 r_2}$, причем берега листов I и II склеиваются так же, как и в первом примере. Заметим, что Π_2' содержит две бесконечно удаленных точки, ∞_1 и ∞_2 , лежащие на листах I и II и не являющиеся точками ветвления. Очевидно, что пространство по-прежнему топологически эквивалентно сфере. Снова имеем двулистное накрытие сферы S^2 с двумя точками ветвления, $z = r_1, z = r_2$.

Рассмотрим график Π_2 многозначной алгебраической функции $w = w(z)$ над комплексной плоскостью \mathbb{C} для алгебраического уравнения

$$w^2 - a_0 \cdot (z - r_1)(z - r_2) = 0. \quad (6')$$

Полезно заметить, что если выколоть из \mathbb{C} точки r_1 и r_2 , то оставшаяся часть графика Π_2 над $\mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2\}$ (обозначим ее $\tilde{\Pi}_2$) гомеоморфна части графика Π_1 над $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (обозначим ее $\tilde{\Pi}_1$). Этот гомеоморфизм, как нетрудно проверить, задается отображением $\Phi: (z, w) \mapsto (v, \tau)$, где

$$\tau = \frac{z - r_1}{z - r_2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \cdot \frac{w}{z - r_2},$$

и преобразует уравнение (6') к уравнению $v^2 - \tau = 0$, риманову поверхность Π_1 которого мы рассмотрели выше. Однако, если расши-

рение $\tilde{\Pi}_1$ было получено естественно и просто, то расширение $\tilde{\Pi}_2$ осуществить более сложно, и мы его не рассматриваем. Однако выше построен его гомеоморфный образ Π_2 .

Таким образом, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\Pi}_2 & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{\Pi}_1 & \xrightarrow{v=v(t)} & S^2 \text{ (}v\text{-сфера)} \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow \tau=v^2 & \\
 S^2 & \xrightarrow{\tau=\frac{z-r_1}{z-r_2}} & S^2 & & \\
 \text{(}z\text{-сфера)} & & \text{(}\tau\text{-сфера)} & &
 \end{array} \tag{7}$$

(где $t = (\tau, v)$ и где не все отображения являются гомеоморфизмами).

Если дан интеграл

$$\int_{z_0}^z R(z, \sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)}) dz = \int_{v_0}^v R(z, \omega(z)) dz$$

по некоторому пути γ , принадлежащему $\mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2\}$, то горизонтальные отображения диаграммы (7) позволяют преобразовать его в интеграл на v -сфере S^2 :

$$\int_{v_0}^v \tilde{R}(v^2, v) dv,$$

где \tilde{R} — рациональная функция. Это объясняет, почему формальная подстановка Эйлера

$$v = \sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{z-r_1}{z-r_2}}$$

приводит к рационализации подынтегрального выражения.

Мы придем к существенно новому результату, если рассмотрим многочлен $p(z)$ третьей степени. Итак, рассмотрим алгебраическую функцию вида

$$\omega = \sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}, \tag{8}$$

где r_1, r_2, r_3 попарно различны. Функция ω имеет две ветви, но «соединяются» они между собой более сложным образом. Обход одной точки r_i приводит к изменению ветви функции ω , обход любых двух сохраняет ветвь, обход всех трех точек, как и обход точки ∞ , меняет ветвь. Чтобы «запретить» эти переходы, достаточно сделать разрезы $\overline{r_1 r_2}$ и $\overline{r_3 \infty}$ на z -сфере. Тогда каждая ветвь функции ω однозначна на таком листе с разрезами. Чтобы одна ветвь переходила в другую нужным образом, склеим экземпляры I и II соответственно по разрезам $\overline{r_1 r_2}$ и $\overline{r_3 \infty}$, причем берега склеиваются, как ранее. Полученное топологическое пространство Π'_3 , очевидно, является римановой поверхностью функции (8). Существенным отличием поверхности Π'_3 от поверхности Π'_2 является то,

что она топологически эквивалентна сфере с ручкой (рис. 27 — здесь разрезы сначала расширяются в «дыры», от них вытягиваются затем трубки, края которых и склеиваются нужным способом). Естественное отображение $\mathbb{P}_3^1 \rightarrow \mathbb{C}$ является двулистным накрытием S^2 с точками ветвления r_1, r_2, r_3, ∞ .

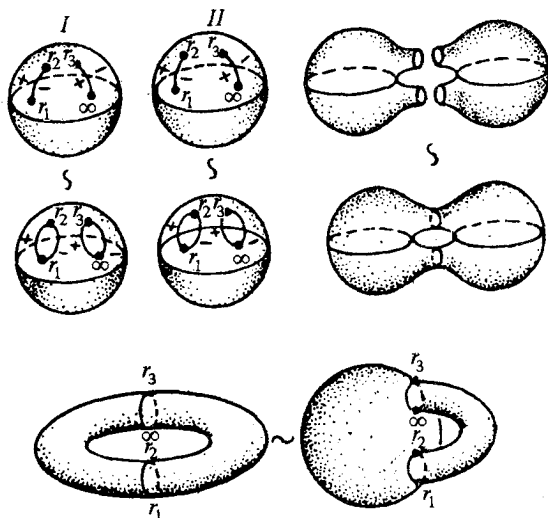


Рис. 27

Для функции $\omega = \sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)}$, где r_1, r_2, r_3, r_4 попарно различны, будем иметь риманову поверхность \mathbb{P}_4^1 , гомеоморфную \mathbb{P}_3^1 . Это следует из того, что два разреза, $\overline{r_1 r_2}$ и $\overline{r_3 r_4}$, разделяют однозначные ветви и точка r_4 играет роль точки ∞ предыдущего примера (последняя не является точкой ветвления).

Отметим, что интегрирование рациональных функций, заданных на поверхностях $\mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$, приводит к теории эллиптических интегралов.

Несложно исследовать и случай алгебраической функции

$$\omega = \sqrt{a_0(z-r_1) \dots (z-r_n)}, \quad (9)$$

где r_i попарно различны между собой. На z -сфере делаем $n/2$ разрезов $\overline{r_1 r_2}, \dots, \overline{r_{n-1} r_n}$, если n четно, и $(n+1)/2$ разрезов $\overline{r_1 r_2}, \dots, \overline{r_{n-2} r_{n-1}}, \overline{r_n \infty}$, если n нечетно. Взяв два экземпляра z -сферы с такими разрезами, склеиваем их по соответствующим разрезам. Построения, аналогичные изображенным на рис. 27, дадут сферу с $\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n-2}{2}$ или с $\frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ ручками. Это и есть риманова поверхность функции (9). Число ручек p (род поверхности) связано с числом V точек ветвления римановой поверхности равенством $V = 2(p+1)$.

Таким образом, многозначная алгебраическая функция, определяемая уравнением (3), имеет риманову поверхность, топологически эквивалентную сфере с ручками. Это утверждение справедливо для любой многозначной алгебраической функции.

Упражнение 1°. Постройте риманову поверхность алгебраической функции $\omega^n - z = 0$, $n > 2$ целое, и убедитесь, что она n -листная и топологически эквивалентна сфере.

Изучение неалгебраических аналитических функций $\omega(z)$, удовлетворяющих уравнению $f(z, \omega) = 0$ с неалгебраической аналитической функцией f , в z -плоскости также приводит к римановым поверхностям, на которых аналитические функции однозначны.

Упражнение 2°. Рассмотрите логарифмическую функцию, определяемую уравнением $e^\omega - z = 0$, и постройте ее риманову поверхность.

§ 5. Немного об узлах

Понятие узла интуитивно представляется несложным. Простейшими примерами узлов являются «простой узел» (рис. 28) и «восьмерка» (рис. 29), которые нетрудно изобразить с помощью нити. Вся-

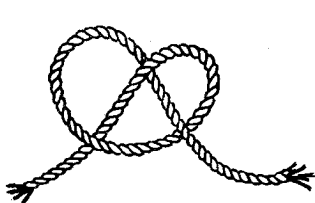


Рис. 28

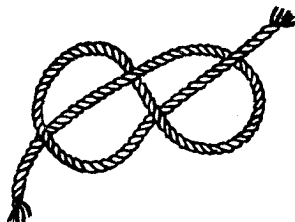


Рис. 29

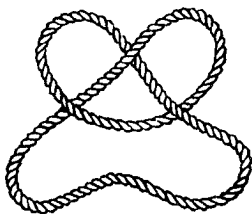


Рис. 30

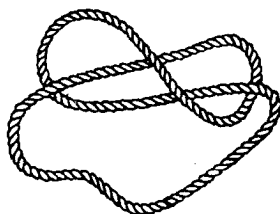


Рис. 31

кие попытки перевести «простой узел» в «восьмерку», не протаскивая концы через петлю, окончатся неудачей. Таким образом, эксперимент показывает, что эти узлы различны. Возникает вопрос о математической классификации узлов.

Мы можем запретить протаскивание концов через петлю, если отождествим (склеим) концы веревки (рис. 30 и 31). Тогда естественным будет следующее определение.